Минимаксные задачи тропической оптимизации и их приложения

Баско Ульяна Львовна, гр. 15.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Кривулин Н. К.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Соловьев И. П.

Санкт-Петербург
2019 г.

Задачи тропической оптимизации

- Задачи тропической оптимизации составляют широкий класс задач тропической (идемпотентной) математики, которая изучает полукольца с идемпотентным сложением.
- Особенность задач — возможность получить полное решение в явной аналитической форме путем их сведения к:
  - исследованию спектра линейного оператора;
  - решению линейных векторных уравнений;
  - другим вычислительным проблемам идемпотентной алгебры.

Цель работы:

- используя методы тропической оптимизации, построить полные прямые решения некоторых задач оптимизации;
- свести задачу оптимального планирования сроков выполнения проектов к задаче тропической оптимизации;
- получить решение задачи планирования в явном виде и исследовать его вычислительную сложность.

Приложение к оптимальному планированию

Традиционные подходы к решению задач планирования сроков выполнения проектов:

- методы линейного программирования;
- методы оптимизации на графах;
- методы сетевого планирования:
  - метод критического пути (CPM — Critical Path Method);
  - метод оценки и пересмотра планов (PERT — Program Evaluation and Review Technique).

Такие методы обычно приводят к численному решению в виде итерационных вычислительных алгоритмов.

Преимущество задач тропической оптимизации: возможность получить прямое решение в компактной векторной форме, удобной для формального анализа и непосредственных вычислений.

Описание задачи сетевого планирования

- Пусть проект состоит в параллельном выполнении n работ.
- Для каждой работы $i = 1, \dots, n$ введены обозначения:

  x_i — время начала работы;
  y_i — время завершения работы;
  a_{ij} — наименьший допустимый интервал между началом работы i и завершением j.

- Ограничения «старт-финиш» определяют отношения между временем начала и завершения работ в форме неравенств (включая хотя бы одно равенство):

$$y_i \geqslant x_j + a_{ij}, \quad i,\ j = 1, \dots, n.$$

- Все неравенства для времени завершения работы i можно объединить в виде равенства

$$y_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j + a_{ij}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Описание задачи сетевого планирования

- Время цикла работы i определяется соотношением $y_i - x_i$.
- Максимальный разброс времени цикла вычисляется по формуле

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i - x_i) - \min_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i - x_i) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i - x_i) + \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - y_i).$$

- Минимум максимального разброса времени цикла — критерий оптимальности плана.

Задача планирования принимает вид:

$$\min_{x_1,\ldots,x_n}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i - x_i) + \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - y_i)\right),$$
$$y_i = \max_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j + a_{ij}), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Идемпотентное полуполе

- $\langle \mathbb{X}, \oplus, \odot, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$ — идемпотентное полуполе с нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$, где $\oplus$ — операция сложения, $\odot$ — операция умножения.
- Сложение и умножение ассоциативны и коммутативны. Операция умножения дистрибутивна относительно сложения.
- Сложение обладает свойством идемпотентности, т. е. для любого x выполняеся $x \oplus x = x$.
- Для любого ненулевого x существует обратный элемент x^{-1}, такой что $x \odot x^{-1} = \mathbb{1}$.
- Идемпотентность сложения порождает на $\mathbb{X}$ отношение $\leqslant$ порядка: $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$.
- Для упрощения записи знак умножения опускается: $x \odot y = xy$.

Пример

$\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$ — $(\max, +)$-алгебра.

Матрицы

- $\mathbb{X}^{m\times n}$ — множество матриц над $\mathbb{X}$ размера $m \times n$.
- Операции над согласованными по размеру матрицами $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ и $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ определены так:

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{AC}\}_{ij} = \bigoplus_k a_{ik}c_{kj}, \quad \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = xa_{ij}.$$

- Матрица $A \in \mathbb{X}^{n\times n}$ — неразложимая, если одинаковыми перестановками строк и столбцов ей нельзя придать блочно-треугольный вид.
- Матрица называется регулярной по столбцам, если она не содержит нулевых столбцов.
- Матрица $\boldsymbol{I} = \mathrm{diag}(\mathbb{1}, \dots, \mathbb{1})$, у которой все недиагональные элементы равны $\mathbb{0}$, называется единичной.
- Для любой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ и натурального n выполняется: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}$.
- След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ есть $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Векторы

- $\mathbb{X}^n$ — множество векторов-столбцов над $\mathbb{X}$ размера n.
- Вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$ — регулярный, если $x_i \neq \mathbb{0}$ для любого i.
- Для ненулевого вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$ определен вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$, где $x_i^- = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^- = \mathbb{0}$ иначе.
- Неравенства для векторов понимаются покомпонентно.
- Для регулярного вектора $\boldsymbol{x}$ выполняется $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^- \geqslant \boldsymbol{I}$.
- Если $\boldsymbol{x}$ ненулевой, то $\boldsymbol{x}^-\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$.
- Вектор $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^n$ линейно зависит от $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{X}^n$, если

$$\boldsymbol{y} = a_1\boldsymbol{x}_1 \oplus \cdots \oplus a_m\boldsymbol{x}_m, \text{ где } a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{X}.$$

Собственное число и собственный вектор матрицы

Собственное число и вектор

- Число λ и ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$ являются собственным значением и собственным вектором матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, если они удовлетворяют равенству $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.
- У неразложимой матрицы $\boldsymbol{A}$ существует единственное собственное число, которое вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n).$$

Нахождение собственных векторов

- Для матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$ определим

$$\boldsymbol{A}_\lambda^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A}_\lambda \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^{n-1}, \qquad \boldsymbol{A}_\lambda^+ = \boldsymbol{A}_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda^*.$$

- Линейно независимые столбцы матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^+$ с диагональными элементами, равными $\mathbb{1}$, составляют матрицу $\boldsymbol{A}_\lambda^\times$.
- Все собственные векторы матрицы $\boldsymbol{A}$ принимают вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^\times \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^n.$$

Задача тропической оптимизации

В терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$ задача

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - x_i) + \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - y_i) \right),$$
$$y_i = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j + a_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n$$

записывается в виде

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{y}^{-} \boldsymbol{x} \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{y},$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}.$$

С помощью подстановки $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ получаем задачу без ограничений:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} (\boldsymbol{A} \boldsymbol{x})^{-} \boldsymbol{x}$$

Предварительные результаты

Теорема

Для любой регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{d}$ все решения неравенства $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{d}$ имеют вид

$$\boldsymbol{x} \leqslant (\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

Теорема [Кривулин, 2009]

Пусть $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица, λ — ее собственное число. Тогда имеют место равенства

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda, \qquad \min_{\boldsymbol{x}} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1},$$

причем минимумы достигаются на собственном векторе матрицы $\boldsymbol{A}$.

Решение задачи тропической оптимизации

Пусть задана неразложимая матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$.

Задача: найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x}.$$

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица с собственным числом λ и $\boldsymbol{A}_{\lambda} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$. Тогда

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \mathbb{1},$$

причем минимум достигается тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — любой из собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$, которые имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\lambda}^{\times}\boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{v}$ — любой ненулевой вектор соответствующей размерности.

Схема доказательства

- Векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}$ — регулярные, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-} \geqslant \boldsymbol{I}$, тогда

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{x} = \mathbb{1}.$$

- Для собственного вектора $\boldsymbol{x}_0$ неразложимой матрицы $\boldsymbol{A}$, соответствующего ее собственному числу λ, выполняется

$$\boldsymbol{x}_0^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{x}_0 = \lambda\boldsymbol{x}_0^{-}\boldsymbol{x}_0(\lambda\boldsymbol{x}_0)^{-}\boldsymbol{x}_0 = \lambda\lambda^{-1}\boldsymbol{x}_0^{-}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^{-}\boldsymbol{x}_0 = \mathbb{1}.$$

- Заменим уравнение $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$ эквивалентной системой

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \alpha^{-1}, \qquad \alpha > \mathbb{0}.$$

- Нетрудно показать, что $\alpha = \lambda$. Теперь система принимает вид

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \lambda^{-1}.$$

Схема доказательства

- Множество решений системы не изменится при переходе к системе неравенств

$$\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda^{-1}.$$

- Применение леммы о решении неравенств дает неравенства

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant (\lambda^{-1}\boldsymbol{x}^{-})^{-} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \leqslant (\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-})^{-} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

- Объединение неравенств приводит к двойному неравенству

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

- Полученное двойное неравенство эквивалентно равенству

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

- Решением является множество всех собственных векторов

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_{\lambda}^{\times}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{X}^{n}.$$

Численный пример

Рассмотрим проект, состоящий из $n = 3$ работ, связанных ограничениями «старт-финиш», которые заданы матрицей

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 48 & 69 & 14 \\ 33 & 13 & 27 \\ 15 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Используя арифметику полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$, возведем $\boldsymbol{A}$ во вторую и третью степени и вычислим следы матрицы $\boldsymbol{A}$ и ее степеней:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 102 & 117 & 96 \\ 81 & 102 & 47 \\ 63 & 84 & 31 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 150 & 171 & 144 \\ 135 & 150 & 129 \\ 117 & 132 & 111 \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = 48, \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^2 = 102, \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^3 = 150.$$

Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ равен

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = 51.$$

Численный пример

Составим матрицу $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$ и возведем ее в квадрат:

$$\boldsymbol{A}_\lambda = \begin{pmatrix} -3 & 18 & -37 \\ -18 & -38 & -24 \\ -36 & -47 & -41 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_\lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & -6 \\ -21 & 0 & -55 \\ -39 & -18 & -71 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицы $\boldsymbol{A}_\lambda^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A}_\lambda \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^2$ и $\boldsymbol{A}_\lambda^+ = \boldsymbol{A}_\lambda \boldsymbol{A}_\lambda^*$:

$$\boldsymbol{A}_\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & 18 & -6 \\ -18 & 0 & -24 \\ -36 & -18 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_\lambda^+ = \begin{pmatrix} 0 & 18 & -6 \\ -18 & 0 & -24 \\ -36 & -18 & -41 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу $\boldsymbol{A}_\lambda^\times$ и получим решение в векторной форме:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^\times \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} v.$$

В обычной записи, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$:

$$x_1 = v + 18, \qquad x_2 = v, \qquad x_3 = v - 18.$$

Решение еще одной задачи тропической оптимизации

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ — заданная неразложимая матрица.

Задача: найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x}.$$

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$ — неразложимая матрица со спектральным радиусом $\lambda = \mathbb{1}$. Тогда

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{x} = \mathbb{1},$$

причем минимум достигается тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — любой из собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$, которые имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\times}\boldsymbol{v},$$

где $\boldsymbol{v}$ — любой ненулевой вектор соответствующей размерности.

Заключение

1. Изучены методы тропической математики, которые были использованы для решения задач тропической оптимизации.
2. Построены полные решения двух задач тропической оптимизации, целевые функции которых заданы с помощью неразложимой матрицы.
3. Показано, что все решения задач совпадают с множеством собственных векторов матрицы, соответствующих ее спектральному радиусу.
4. Решения представлены в компактной векторной форме, удобной для формального анализа и непосредственных вычислений с невысокой вычислительной сложностью.
5. Разработан пример приложения одного из полученных результатов к решению задачи оптимального планирования.
6. Результаты были представлены на Всероссийской научной конференции по проблемам информатики «СПИСОК-2019».
7. Подготовлена статья, принятая к публикации в журнале «Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия».