Исправление

В последней лекции курса было приведено утверждение о том, что при авторегрессонном продолжении ковариационной функции имеет место равномерная сходимость спектральных плотностей. Само по себе это утверждение (при некоторых ограничениях) верно, но в доказательстве была допущена ошибка. Ниже приводится материал, замещающий это утверждение.

Начнем с двух общих (но более слабых) утверждений.

Предложение 1. *Пусть $f(\lambda)$ — спектральная плотность некоторой вещественной стационарной последовательности. Если f непрерывна и отделена от нуля, то существует такой реализуемый процесс авторегрессии, что его спектральная плотность отличается от f сколь угодно мало в равномерной метрике.*

Доказательство. Пусть $0 < m^2 \le f(\lambda) \le M^2$. Обозначим $h(\lambda) = 1/\sqrt{f(\lambda)}$. Тогда $1/M \le h(\lambda) \le 1/m$. Функция h, очевидно, непрерывна и может быть продолжена на всю вещественную ось по периодичности, причем продолжение тоже будет непрерывной функцией.

По теореме Вейерштрасса о тригонометрических полиномах функцию h можно равномерно приблизить с точностью до сколь угодно малого $\varepsilon < 1/M$ с помощью тригонометрического полинома Q периода 2π. Ясно, что $1/M - \varepsilon \le Q(\lambda) \le 1/m + \varepsilon$.

Поскольку всегда можно представить Q в виде

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{q} c_k e^{-ik\lambda} = \left| \sum_{k=0}^{q} c_k e^{-ik\lambda} \right|,$$

то в обозначениях

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{|Q(\lambda)|^2}$$

получим, что

$$\left|\widehat{f}(\lambda) - f(\lambda)\right| \le \left| \frac{1}{Q(\lambda)} - \frac{1}{h(\lambda)} \right| \left| \frac{1}{Q(\lambda)} + \frac{1}{h(\lambda)} \right| \le \max_{\lambda} \left(1/h(\lambda) + 1/Q(\lambda)\right) \left| \frac{h(\lambda) - Q(\lambda)}{h(\lambda)Q(\lambda)} \right| \le$$
$$\le \frac{2}{1/M - \varepsilon} \, \frac{\varepsilon M}{1/M - \varepsilon}.$$

Тем самым $\widehat{f}$ равномерно аппроксимирует f.

Спектральная плотность $\widehat{f}(\lambda)$ соответствует некоторому процессу авторегрессии. Стандартной перестройкой полинома $Q(z)$ можно добиться того, что этот процесс является реализуемым. $\square$

Предложение 2. *Пусть $R_n(k)$ — последовательность ковариационных функций с соответствующими спектральными мерами m_n, сосредоточенными на $(-\pi,\pi]$. Если для любого k имеет место сходимость $R_n(k) \to R(k)$, где $R(k)$ — ковариационная функция со спектральной мерой m, сосредоточенной в $(-\pi,\pi)$, то $m_n \Rightarrow m$ в том смысле, что g $\int_{(-\pi,\pi]} g dm_n \to \int_{(-\pi,\pi]} g dm$ для любой ограниченной непрерывной в $(-\pi,\pi]$ функции g.*

Доказательство. Перейдем от ковариационных функций к корреляционным. А именно, положим $\rho_n(k) = R_n(k)/R_n(0)$ и $\rho(k) = R(k)/R(0)$, а также $\mathcal{P}_n = m_n/R_n(0)$ и $\mathcal{P} = m/R(0)$. Ясно, что $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}$ являются распределениями и одновременно — спектральными мерами последовательностей ρ_n и ρ соответственно. Кроме того, сходимость $R_n(k) \to R(k)$ эквивалентна сходимости $\rho_n(k) \to \rho(k)$, а слабая сходимость $m_n \Rightarrow m$ — слабой сходимости $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$. Таким образом, мы имеем

$$\rho_n(k) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ik\lambda}\mathcal{P}_n(d\lambda) \to \rho(k) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ik\lambda}\mathcal{P}(d\lambda).$$

Пусть ξ_n — случайная величина, имеющая распределение $\mathcal{P}_n$, а $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{P}$. Тем самым $\mathbb{E}e^{ik\xi_n} \to \mathbb{E}e^{ik\xi}$. Введем случайные величины $\eta_n = (\xi_n+\pi)/2\pi$ и $\eta = (\xi_n+\pi)/2\pi$. Ясно, что распределение $\mathcal{Q}_n = \mathcal{L}(\xi_n)$ сосредоточено на $(0,1]$, а распределение $\mathcal{Q} = \mathcal{L}(\xi)$ — на $(0,1)$. Кроме того,

$$\rho_n(k) = \mathbb{E}e^{ik\xi_n} = \mathbb{E}e^{ik(2\pi\eta_n-\pi)} = e^{-\pi k}\mathbb{E}e^{i2\pi k\eta_n} \to \rho(k) = \mathbb{E}e^{ik\xi} = \mathbb{E}e^{ik(2\pi\eta-\pi)} = e^{-\pi k}\mathbb{E}e^{i2\pi k\eta}$$

Поэтому $\mathbb{E}e^{i2\pi k\eta_n} \to \mathbb{E}e^{i2\pi k\eta}$. Из теоремы о характеризации сходимости на единичном торе следует, что $\mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}$. Поэтому (так как линейное преобразование непрерывно) $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$ и утверждение доказано. □

Следствие 1. В случае, когда у предельной меры m нет нагрузок на всем промежутке $(-\pi,\pi]$, из этого утверждения следует в частности, что для любого отрезка $A = [a,b] \subset (-\pi,\pi]$ имеет место сходимость $m_n(A) \to m(A)$.

Предложение 1 говорит о том, что непрерывная строго положительная спектральная плотность может быть приближена сколь угодно точно с помощью спектральной плотности некоторого процесса авторегрессии. В то же время остается непонятным, можно ли это сделать с помощью обсуждаемой специальной процедуры.

Предложение 2, напротив, рассматривает (в том числе) эту специальную процедуру, но гарантирует лишь слабую сходимость спектральных мер вместо равномерной сходимости плотностей.

На самом деле имеет место ожидаемый результат.

Теорема 1. *Пусть $R_\eta(k)$ — ковариационная функция некоторого вещественного стационарного процесса, имеющего непрерывную отделенную от нуля спектральную плотность $f_\eta(\lambda)$. Обозначим $f_\xi^{(p)}(\lambda)$ спектральную плотность реализуемого процесса авторегрессии, первые p значений ковариационной функции которого совпадают со значениями R_η. Тогда $f_\xi^{(p)}(\lambda) \to f_\eta(\lambda)$ при $p \to \infty$ равномерно по λ.*

Эта теорема объясняет популярность обсуждаемого метода. Но доказательство теоремы довольно сложно и поэтому опускается.