Спецсеминар 3 курс СМ-СМ. Условные распределения абсолютно непрерывных случайных величин

1 Введение

На практике часто встречается ситуация, когда нам хочется узнать какую-то информацию о распределении случайной величины ξ_1, в то время как доступна для непосредственного наблюдения (измерения) другая случайная величина ξ_2.

Если ξ_2 имеет дискретное распределение и принимает значения y_i с положительными вероятностями p_i, то легко определить понятие *условного распределения* ξ_1 *при условии* $\xi_2 = y_i$ равенством

$$\mathbb{P}(\xi_1 \in A \,|\, \xi_2 = y_i) = \frac{\mathbb{P}(\xi_1 \in A,\, \xi_2 = y_i)}{\mathbb{P}(\xi_2 = y_i)}\ , \quad A \in \mathcal{B}_R.$$

Обозначим левую часть этого равенства $\mathcal{Q}(A, y_i)$. Из свойств условных вероятностей сразу же следует, что при любом y_i условное распределение $\mathcal{Q}(\,\cdot\,, y_i)$ является вероятностной мерой. Поэтому можно говорить об *условном математическом ожидании случайной величины* $f(\xi_1)$ *при условии* $\xi_2 = y_i$:

$$\mathbb{E}\big(f(\xi_1) \,|\, \xi_2 = y_i\big) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{Q}(dx, y_i) = \frac{\mathbb{E}\big(f(\xi_1),\, \xi_2 = y_i\big)}{\mathbb{P}(\xi_2 = y_i)}\ ,$$

если только этот интеграл существует. Другие понятия, понятия, связанные с распределениями случайных величин и векторов также легко переносятся на условные распределения, если случайная величина ξ_2 дискретна.

Возникает вопрос — как ввести понятие условного распределения ξ_1 при условии $\xi_2 = y$ в том случае (например), когда $\mathbb{P}(\xi_2 = y) = 0$ для любого $y \in \mathbb{R}$? Строгий и полный ответ формулируется в терминах так называемых условных математических ожиданиях относительно σ-алгебр и отображений. Это особая теория, и мы ее не будем сейчас трогать.

Если же у случайных величин ξ_1, ξ_2 есть совместная плотность распределения, ситуация сильно упрощается. Ею мы и будем заниматься.

2 Основные формулы

Дальнейшие построения приведены для случая, когда обе случайные величины ξ_1, ξ_2 принимают значения в $\mathbb{R}$. Это ограничение введено только для удобства записи, все формулы сохранятся (с очевидными изменениями), если ξ_1 и ξ_2 — случайные вектора, принимающие значения в евклидовых пространствах произвольных (не обязательно равных) размерностей. Единственное, что требуется — это существование совместной плотности распределения у ξ_1 и ξ_2.

Определение 2.1. Пусть двумерный случайные величины ξ_1, ξ_2 обладают совместной плотностью распределения $p_{\xi_1\xi_2}(x, y) = p(x, y)$. Тогда функция

$$p(x|y) = p_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{p(x,y)}{p_{\xi_2}(y)} & \text{если} \quad p_{\xi_2}(y) \neq 0, \\ p_{\xi_1}(x) & \text{если} \quad p_{\xi_2}(y) = 0 \end{cases}$$

называется *условной плотностью распределений* ξ_1 *при условии* $\xi_2 = y$.

Замечание 2.1. Функция $p(\,\cdot\,|\,y)$ является плотностью некоторого распределения при любом $y \in \mathbb{R}$. Действительно, при тех y, при которых $p_{\xi_2}(y) = 0$, это очевидно, а при остальных y

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{p(x,y)}{p_{\xi_2}(y)}\,dx = \frac{p_{\xi_2}(y)}{p_{\xi_2}(y)} = 1.$$

Определение 2.2. Вероятностная мера

$$\mathcal{Q}(A,y) = \mathbb{P}(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 = y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A p(x|y)dx, \quad A \in \mathcal{B}_R, \tag{1}$$

называется *условным распределением* ξ_1 *при условии* $\xi_2 = y$, а интеграл

$$\mathbb{E}\big(f(\xi_1)\,|\,\xi_2 = y\big) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{Q}(dx,y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)p(x|y)dx \tag{2}$$

(в предположении, что правая часть последнего равенства существует) — *условным математическим ожиданием случайной величины* $f(\xi_1)$ *при условии* $\xi_2 = y$.

Замечание 2.2. Поясним определение (1). Если для любого сколь угодно малого $h > 0$ вероятность $\mathbb{P}\big(\xi_2 \in (y-h, y+h)\big)$ положительна, то мы по определению условной вероятности получим, что

$$\mathbb{P}\big(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 \in (y-h,y+h)\big) = \frac{\mathbb{P}\big(\xi_1 \in A,\, \xi_2 \in (y-h,y+h\big)}{\mathbb{P}\big(\xi_2 \in (y-h,y+h)\big)}\,.$$

Естественно ожидать, что

$$\mathbb{P}\big(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 = y\big) = \lim_{h\to 0} \mathbb{P}(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 \in (y-h,y+h)),$$

если только предел в правой части существует. Покажем, что в «хорошем» случае это действительно так. Действительно,

$$\mathbb{P}\big(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 \in (y-h,y+h)\big) = \frac{\displaystyle\int_A dx \int_{y-h}^{y+h} dt\, p(x,t)}{\displaystyle\int_{y-h}^{y+h} p_\xi(t)dt} = \frac{\displaystyle\int_A dx \frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} dt\, p(x,t)}{\displaystyle\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} p_{\xi_2}(t)dt}\,. \tag{3}$$

Если плотность $p_{\xi_2}(t)$ непрерывна и положительна в окрестности точки y, то

$$\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} p_{\xi_2}(t)dt \to p_{\xi_2}(y)$$

при $h \to 0$. Аналогично, легко привести условия на совместную плотность $p(x,t)$, при которых

$$\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} dt\, p(x,t) \to p(x,y),$$

причем этот предельный переход можно совершать под знаком интеграла, стоящего в числителе правой части (3).

Таким образом, при «при благоприятных условиях»

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 \in (y-h,y+h)) \to \frac{\displaystyle\int_A dx\, p(x,y)}{p_{\xi_2}(y)} = \int_A p(x|y)dx,$$

что и соответствует формуле (1).

Свойства условных распределений.

1. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $p_{\xi_1|\xi_2}(x\,|\,y) = p_{\xi_1}(x)$. Это равенство непосредственно следует из Определения 2.1 и из того факта, что $p(x,y) = p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y)$.

   Отсюда сразу же вытекает, что $\mathbb{P}(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 = y) = \mathbb{P}(\xi_1 \in A)$ и $\mathbb{E}\big(f(\xi_1)\,|\,\xi_2 = y\big) = \mathbb{E}f(\xi_1)$.

2. Имеет место «формула полной вероятности» для распределения случайной величины ξ_1 :

$$\mathbb{P}(\xi_1 \in A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 = y)p_{\,\xi_2}(y)dy. \tag{4}$$

   Действительно, согласно (3)

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(\xi_1 \in A\,|\,\xi_2 = y)p_{\,\xi_2}(y)dy = \int_{\mathbb{R}} p_{\,\xi_2}(y)dy \int_A p(x|y)dx = \int_{y:p_{\xi_2}(y)\neq 0} p_{\,\xi_2}(y)dy \int_A p(x|y)dx =$$
$$= \int_{y:p_{\xi_2}(y)\neq 0} p_{\,\xi_2}(y)dy \int_A \frac{p(x,y)}{p_{\xi_2}(y)}\,dx = \int_A dx \int_{y:p_{\xi_2}(y)\neq 0} dyp(x,y) =$$
$$= \int_A dx \int_{\mathbb{R}} dyp(x,y) = \int_A p_{\xi_1}(x)dx \tag{5}$$

   Из (4) сразу же вытекает аналогичная формула для математических ожиданий:

$$\mathbb{E}f(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big(f(\xi_1)\,|\,\xi_2 = y\big)p_{\,\xi_2}(y)dy. \tag{6}$$

3. Приведем несколько более общую формулу для условных математических ожиданий:

$$\mathbb{E}\big(g(\xi_1,\xi_2)\,|\,\xi_2 = y\big) = \mathbb{E}\big(g(\xi_1,y)\,|\,\xi_2 = y\big). \tag{7}$$

   Ограничимся «показательством» этого утверждения в стиле Замечания 2.2 (знак $\doteq$ означает здесь «ожидаемое равенство»). При фиксированном y

$$\mathbb{E}\big(g(\xi_1,\xi_2)\,|\,\xi_2 = y\big) \doteq \lim_{h\to 0} \mathbb{E}\big(g(\xi_1,\xi_2)\,|\,\xi_2 \in [y-h,y+h]\big) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}\big(g(\xi_1,\xi_2),\,\xi_2 \in [y-h,y+h]\big)}{\mathbb{P}(\xi_2 \in [y-h,y+h])} = \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} dx \frac{1}{2h} \int_{y-h}^{y+h} g(x,t)p(x,t)dt}{\displaystyle\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} p_{\xi_2}(t)dt} \doteq$$
$$\doteq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} dxg(x,y)p(x,y)}{p_{\xi_2}(y)dy} = \int_{\mathbb{R}} g(x,y)p(x|y)dx = \mathbb{E}\big(g(\xi_1,y)\,|\,\xi_2 = y\big),$$

   причем при последнем переходе используется равенство (2) с заменой $f(x)$ на $f_y(x) = g(x,y)$ при фиксированном y.

4. Полагая $g(x,y) = \mathbf{1}_B(x,y)$ при $B \in \mathcal{B}_R$, получим из (7), что

$$\mathbb{P}((\xi_1,\xi_2) \in B\,|\,\xi_2 = y) = \mathbb{P}((\xi_1,y) \in B\,|\,\xi_2 = y), \tag{8}$$

   что является обобщением (1).

5. Если случайные величины ξ_1,ξ_2 независимы, то равенства (7) и (8) переходят соответственно в

$$\mathbb{E}\big(g(\xi_1,\xi_2)\,|\,\xi_2 = y\big) = \mathbb{E}g(\xi_1,y) \quad \text{и} \quad \mathbb{P}\big((\xi_1,\xi_2) \in B\,|\,\xi_2 = y\big) = \mathbb{P}((\xi_1,y) \in B).$$

6. Аналогично формулам (4) и (6),

$$\mathbb{P}((\xi_1, \xi_2) \in B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}((\xi_1, y) \in B \,|\, \xi_2 = y) p_{\xi_2}(y) dy \tag{9}$$

и

$$\mathbb{E} g(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\big(g(\xi_1, y) \,|\, \xi_2 = y\big) p_{\xi_2}(y) dy. \tag{10}$$

7. Если случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, то равенства (9) и (10) переходят соответственно в

$$\mathbb{P}\big((\xi_1, \xi_2) \in B\big) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}((\xi_1, y) \in B) p_{\xi_2}(y) dy \quad \text{и} \quad \mathbb{E} g(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(g(\xi_1, y)) p_{\xi_2}(y) dy.$$