

Комментарии к теме «Характеристические функции»

Практические занятия по теории вероятностей, 322 гр., СМ, 2013 г.

В. В. Некруткин

1 Определение и основные свойства

Сначала сделаем следующее замечание. Пусть η_1, η_2 — случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Положим $\eta = \xi_1 + i\xi_2$, где i — мнимая единица. Тогда математическим ожиданием η называется комплексное число $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi_1 + i\mathbb{E}\xi_2$.

Все основные свойства обычных математических ожиданий (возможно, с «адаптацией») переносятся и на комплексный случай. В частности (проверьте это!), среднее значение произведения независимых¹ комплекснозначных случайных величин равно произведению их средних значений.²

Определение 1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство и $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Тогда комплекснозначная функция вещественной переменной

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E} \cos(t\xi) + i\mathbb{E} \sin(t\xi) \quad (1.1)$$

называется *характеристической функцией* случайной величины ξ .

Отметим, что математическое ожидание в правой части (1.1) существует при любом $t \in \mathbb{R}$.

Из общих свойств математического ожидания видно, что

$$\varphi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathcal{P}_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \mathcal{P}_\xi(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \mathcal{P}_\xi(dx), \quad (1.2)$$

где \mathcal{P}_ξ — распределение случайной величины ξ . Отсюда сразу же следует, что характеристическая определяется не самой случайной величиной, а ее распределением. Поэтому можно говорить о характеристической функции любого распределения \mathcal{P} .³

Если распределение \mathcal{P}_ξ задано таблицей распределения

$$\mathcal{P}_\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

то $\varphi_\xi(t) = \sum_n e^{itx_n} p_n$, а если это распределение обладает плотностью p_ξ , то

$$\varphi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} p_\xi(x) dx. \quad (1.4)$$

Самое важное свойство характеристических функций можно сформулировать так.

Теорема 1.1. (Теорема единственности) Пусть \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — распределения с характеристическими функциями φ_1 и φ_2 . Если $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.⁴

¹Случайные величины $\xi_1 + i\xi_2$ и $\eta_1 + i\eta_2$ объявляются независимыми, если пары (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2) независимы.

²Если только все три математических ожидания существуют.

³Или о преобразовании Фурье этого распределения.

⁴Одно из самых «прямых» доказательств Теоремы 1.1 основано на том, что конечные линейные (с комплексными коэффициентами) комбинации мнимых экспонент вида e^{itx} с различными $t \in \mathbb{R}$ плотны в (комплекснозначном) $L^2(d\mathcal{M})$ для любой конечной меры \mathcal{M} . Тогда, аппроксимируя индикатор $\mathbf{1}_A(x)$ некоторого измеримого множества A с помощью сумм вида $\sum_k c_k e^{itx}$ в $L^2(d\mathcal{P}_\xi)$, мы приходим к выводу, что вероятность $\mathcal{P}_\xi(A)$ может быть сколь угодно точно аппроксимирована суммами вида $\sum_k c_k \varphi_\xi(t_k)$. Конечно, все это нужно делать аккуратно.

Прокомментируем это утверждение. Очевидно (см. формулу (1.2)), что характеристическая функция φ_ξ полностью определяется распределением \mathcal{P}_ξ . Теорема 1.1 утверждает, что верно и обратное. Тем самым у нас появляется (в дополнении к функции распределения, таблице распределения или плотности) еще одна характеристика, полностью определяющая такой сложный объект, как распределение. Иначе говоря, если наша задача состоит в том, чтобы найти некоторое распределение, то найденная характеристическая функция этого распределения является, в принципе, правильным (хотя, может быть, не очень наглядным и не очень пригодным к дальнейшему использованию) ответом.

В общем случае, видимо, не существует простого⁵ способа восстановления распределения по его характеристической функции, но иногда это вполне возможно. Например, если характеристическая функция φ_ξ суммируема на всей прямой, то как несложно доказать, у распределения \mathcal{P}_ξ существует непрерывная плотность, равная

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt. \quad (1.5)$$

Конечно, формула (1.5) является просто-напросто вариантом обратного преобразования Фурье.

Простейшие свойства. Приведем некоторые элементарные свойства характеристических функций.

1. Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$. При этом $\varphi_\xi(0) = 1$.
2. Любая характеристическая функция равномерно непрерывна на всей прямой.
3. Если a, b — постоянные, то $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$.
4. Если φ_ξ — характеристическая функция случайной величины ξ , то $\varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_{-\xi}(t)$.
5. Характеристическая функция φ вещественна тогда и только тогда, когда она четная.
6. Характеристическая функция φ случайной величины ξ вещественна тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(-\xi) = \mathcal{L}(\xi)$.
7. Если случайные величины ξ и η независимы, то $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) \varphi_\eta(t)$. Обратное, вообще говоря, не верно.
8. Пусть распределение \mathcal{P} представлено в виде $\mathcal{P} = \sum_n p_n \mathcal{P}_n$, где \mathcal{P}_n — вероятностные меры, $p_n \geq 0$ и $\sum_n p_n = 1$. Обозначим φ и φ_n характеристические функции распределения \mathcal{P} и \mathcal{P}_n соответственно. Тогда $\varphi = \sum_n p_n \varphi_n$.

Замечание 1.1. Эти свойства показывают, что характеристические функции удобны при линейных преобразованиях случайных величин и сложении независимых случайных величин.

Пусть характеристическая функция φ_ξ не только суммируема, но и вещественна. Тогда (поскольку φ_ξ — четная функция),⁶ равенство (1.5) переписывается как

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_\xi(t) dt. \quad (1.6)$$

и плотность p_ξ тоже является четной функцией. Если φ_ξ еще и неотрицательна то, обозначая $c = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi(t) dt$ видим, что функция $q = \varphi/c$ является плотностью некоторого распределения \mathcal{Q} и, следовательно,⁷ функция $\psi = 2\pi p_\xi/c$ является характеристической функцией этого распределения.

⁵Так называемую «формулу обращения», приводимую в большинстве учебников и выражающую функцию F_ξ через характеристическую функцию φ_ξ , нельзя признать очень привлекательной. К тому же она нам не понадобится.

⁶См. свойства характеристических функций.

⁷Сравните (1.4) и (1.6)!

Эти простые соображения помогают находить характеристические функции некоторых распределений без всяких вычислений.

Другие часто используемые свойства характеристических функций относятся к их связи с моментами $m_k = \mathbb{E}\xi^k$ случайных величин.

Предложение 1.1. 1. Если $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$ при некотором целом $k \geq 1$, то характеристическая функция φ_ξ является k раз непрерывно дифференцируемой в \mathbb{R} . При этом $\varphi_\xi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(\xi^k e^{i\xi t})$. В частности, $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k m_k$.

2. Если k — четное и существует производные $\varphi_\xi^{(k)}(0)$, то $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$.⁸

3. Пусть $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$. Тогда при $t \rightarrow 0$

$$\varphi_\xi(t) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(it)^j}{j!} m_j + o(|t|^k).$$

Конечно, последнее равенство — простое следствие из формулы Тейлора.

Приведем вид характеристических функций для наиболее популярных распределений.

Таблица 1: Характеристические функции некоторых дискретных распределений

Распределение	Обозначение	Характеристическая функция
Дирака (a)	δ_a	e^{ita}
Бернулли (p)	$\text{Ber}(p)$	$1 - p + p e^{it}$
Биномиальное (n, p)	$\text{Bin}(n, p)$	$(1 - p + p e^{it})^n$
Геометрическое (p)	$\text{Geom}(p)$	$\frac{p}{1 - (1 - p)e^{it}}$
Пуассона (λ)	$\text{П}(\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it} - 1)}$

Таблица 2: Характеристические функции некоторых абсолютно непрерывных распределений

Распределение	Обозначение	Характеристическая функция
Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$	$U(a, b)$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b - a)}$
Равномерное распределение на отрезке $[-a, a]$	$U(-a, a)$	$\sin(at)/at$
Показательное распределение (λ)	$\text{Exp}(\lambda)$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
Нормальное распределение (a, σ^2)	$N(a, \sigma^2)$	$e^{ita - \sigma^2 t^2 / 2}$
Стандартное нормальное распределение	$N(0, 1)$	$e^{-t^2 / 2}$

Упражнение. Используя приведенные свойства характеристических функций, а также Таблицу 2, и не производя никаких прямых вычислений, докажите, что

⁸Для нечетного k это свойство, вообще говоря, неверно.

- двустороннее показательное распределение (распределение Лапласа) с параметром $\lambda > 0$, определяемое плотностью

$$p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

имеет характеристическую функцию $\varphi(t) = \lambda^2/(\lambda^2 + t^2)$;

- распределение Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

имеет характеристическую функцию $\varphi(t) = e^{-|t|}$;

- треугольное распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), \quad x \in [-a, a], \quad a > 0$$

имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \frac{2(1 - \cos(at))}{a^2 t^2};$$

- распределение с плотностью⁹

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(ax)}{ax^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|/a & \text{при } t \in [-a, a], \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

- если случайная величина ξ с характеристической функцией φ_ξ обладает конечным абсолютным моментом $\mathbb{E}|\xi|^{2k}$ при некотором целом $k \geq 1$, то существует такая постоянная c_k , что функция $\psi(t) = c_k \varphi_\xi^{(2k)}(t)$ является характеристической функцией некоторого распределения.¹⁰

Поскольку каждая характеристическая функция определяет некоторое распределение (и, конечно, наоборот), то возникает естественный вопрос: какие комплекснозначные функции вещественной переменной являются преобразованиями Фурье некоторой вероятностной меры?¹¹ Для ответа на этот вопрос нам понадобится следующее определение.

Определение 1.2. Комплекснозначная функция ψ называется *неотрицательно определенной*, если для любого $n \geq 1$, любых вещественных t_1, \dots, t_n и любых комплексных z_1, \dots, z_n выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^n \psi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0. \quad (1.7)$$

Теорема 1.2. (Теорема Бохнера-Хинчина).

1. Любая характеристическая функция является неотрицательно определенной.
2. Пусть ψ — неотрицательно определенная функция. Если $\psi(0) = 1$ и если функция ψ непрерывна в нуле, то она является характеристической функцией некоторого распределения.

⁹Это распределение не имеет специального названия и интересно видом своей характеристической функции.

¹⁰Какого?

¹¹Все перечисленные выше свойства характеристических функций являются для этого лишь необходимыми условиями.

Замечание 1.2. 1. Доказательство первого утверждения Теоремы 1.2 достаточно просто: при $\psi = \varphi_\xi$ достаточно представить левую часть неравенства (1.7) в виде $\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n e^{it_k} z_k \right|^2$. Для доказательства второго (основного) утверждения нужно потратить гораздо больше усилий.

2. В принципе, при помощи неравенства (1.7) можно пытаться проверять, является ли некоторая функция характеристической. Но, как правило, это достаточно трудоемкая процедура.

3. Попробуйте непосредственно из неравенства (1.7) вывести некоторые простейшие (например, первое, второе и четвертое) свойства характеристических функций. При этом, конечно, нужно предполагать, что и другие условия второго пункта Теоремы 1.2 тоже выполнены.

Замечание 1.3. Из теоремы Бохнера-Хинчина вытекает следующий факт. Пусть φ_n — последовательность характеристических функций, причем при любом $t \in \mathbb{R}^d$ последовательность $\varphi_n(t)$ имеет предел $\varphi(t)$. Тогда φ — неотрицательная функция.

Если к тому же φ непрерывна в нуле, она является характеристической для некоторого распределения.

2 Характеристические функции случайных векторов

Определение 2.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство и

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$$

— d -мерный случайный вектор. Тогда комплекснозначная функция φ_ξ , определенная в \mathbb{R}^d равенством

$$\varphi_\xi(\bar{t}) = \varphi_{\xi_1 \dots \xi_d}(t_1, \dots, t_d) = \mathbb{E} e^{i(\bar{t}, \bar{\xi})} = \mathbb{E} e^{i \sum_{k=1}^d t_k \xi_k} \quad \text{с } \bar{t} = (t_1, \dots, t_d)^T$$

называется *характеристической функцией* случайного вектора $\bar{\xi}$.

Поскольку при $d = 1$ это определение совпадает с определением характеристической функции случайной величины, то не удивительно, что многие свойства характеристических функций случайных векторов аналогичны одномерному случаю.¹² Например, если обозначить \mathcal{P}_ξ распределение $\bar{\xi}$, то окажется, что

$$\varphi_\xi(\bar{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\bar{t}, \bar{x})} \mathcal{P}_\xi(d\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \sum_{k=1}^d t_k x_k} \mathcal{P}_\xi(dx_1 \dots dx_d), \quad \text{где } \bar{x} = (x_1, \dots, x_d)^T.$$

В случае, когда распределение \mathcal{P}_ξ является абсолютно непрерывным, без труда выписывается аналог формулы (1.2).

Точно так же, как и при $d = 1$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — распределения в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ с характеристическими функциями φ_1 и φ_2 . Если $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

Легко выписать « d -мерные аналоги» простейших свойств характеристических функций (одномерных) случайных величин. Например,¹³

1. если $\bar{t} \in \mathbb{R}^d$, то $|\varphi_\xi(\bar{t})| \leq 1$, причем $\varphi_\xi(\mathbf{0}) = 1$, где $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$;
2. любая характеристическая функция d -мерного случайного вектора равномерно непрерывна в \mathbb{R}^d ;

¹²Поэтому они специально не комментируются.

¹³Остальные свойства запишите сами.

3. если $a \in \mathbb{R}$ и $\bar{b} \in \mathbb{R}^d$ — постоянные и $\bar{\eta} = a\bar{\xi} + \bar{b}$, то $\varphi_{\eta}(\bar{t}) = e^{i(\bar{t}, \bar{b})} \varphi_{\xi}(a\bar{t})$;
4. характеристическая функция φ случайного вектора $\bar{\xi}$ вещественна тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}(-\bar{\xi}) = \mathcal{L}(\bar{\xi})$.
5. если случайные вектора $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in \mathbb{R}^d$ независимы и $\bar{\beta} = \bar{\xi} + \bar{\eta}$, то $\varphi_{\beta}(\bar{t}) = \varphi_{\xi}(\bar{t})\varphi_{\eta}(\bar{t})$. Обратное, вообще говоря, не верно.
6. пусть распределение \mathcal{P} , заданное в $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$, представлено в виде $\mathcal{P} = \sum_n p_n \mathcal{P}_n$, где \mathcal{P}_n — вероятностные меры, $p_n \geq 0$ и $\sum_n p_n = 1$. Обозначим φ и φ_n характеристические функции распределения \mathcal{P} и \mathcal{P}_n соответственно. Тогда $\varphi = \sum_n p_n \varphi_n$.

Из утверждения, аналогичного Предложению 1.1, мы приведем здесь лишь ту ее часть, которая будет использоваться в дальнейшем.

Предложение 2.1. Пусть координаты ξ_1, \dots, ξ_d случайного вектора $\bar{\xi}$ обладают конечными вторыми моментами. Обозначим φ_{ξ} характеристическую функцию случайного вектора $\bar{\xi}$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для любого $\bar{t} = (t_1, \dots, t_d)^d$ и любых $1 \leq j, k \leq d$ существуют частные производные $\partial \varphi_{\xi}(\bar{t}) / \partial t_j$ и $\partial^2 \varphi_{\xi}(\bar{t}) / \partial t_j \partial t_k$. Кроме того,

$$\left. \frac{\partial \varphi_{\xi}(\bar{t})}{\partial t_j} \right|_{\bar{t}=\mathbf{0}} = i\mathbb{E}\xi_j \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial^2 \varphi_{\xi}(\bar{t})}{\partial t_j \partial t_k} \right|_{\bar{t}=\mathbf{0}} = -\mathbb{E}\xi_j \xi_k.$$

2. Если $\|\bar{t}\| \rightarrow 0$, то

$$\varphi_{\xi}(\bar{t}) = 1 + i(\mathbb{E}\bar{\xi}, \bar{t}) - \frac{1}{2}(M\bar{t}, \bar{t}) + o(\|\bar{t}\|^2), \quad (2.1)$$

где $M = \mathbb{E}\bar{\xi}\bar{\xi}^T = \{\mathbb{E}\xi_j \xi_k\}_{j,k=1}^d$.

Заметим, что при $\mathbb{E}\bar{\xi} = \mathbf{0}$ равенство (2.1) превращается в

$$\varphi_{\xi}(\bar{t}) = 1 - \frac{1}{2}(\Sigma_{\xi}\bar{t}, \bar{t}) + o(\|\bar{t}\|^2),$$

где Σ_{ξ} — ковариационная матрица вектора $\bar{\xi}$.

Наконец, отметим два специфических свойства характеристических функций (многомерных) случайных векторов. Первое из них относится к понятию независимости.

Пусть $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^T$ — случайный вектор с характеристической функцией $\varphi_{\xi_1 \dots \xi_d}(t_1, \dots, t_d)$.

Предложение 2.2. Для того, чтобы случайные величины ξ_1, \dots, ξ_d были независимы, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_{\xi_1 \dots \xi_d}(t_1, \dots, t_d) = \prod_{k=1}^d \varphi_{\xi_k}(t_k),$$

где φ_{ξ_k} — характеристическая функция случайной величины ξ_k .

Замечание 2.1. Необходимость в Предложении 2.2 следует из общих свойств математических ожиданий. Для доказательства достаточности можно рассмотреть независимые случайные величины η_k с $\mathcal{L}(\eta_k) = \mathcal{L}(\xi_k)$ и воспользоваться теоремой единственности (Теорема 2.1).

Второе утверждение дает возможность относительно легко работать (в терминах характеристических функций) с линейными преобразованиями случайных векторов. Хотя оно доказывается просто и «в лоб», оформим его в виде отдельного утверждения.

Предложение 2.3. Пусть $\bar{\xi}$ — d -мерный случайный вектор с характеристической функцией φ_ξ . Рассмотрим матрицу $A : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^k$ и вектор $\bar{b} \in \mathbb{R}^k$. Наконец, положим $\bar{\eta} = A\bar{\xi} + \bar{b}$ и обозначим характеристическую функцию этого вектора φ_η . Тогда при $\bar{s} \in \mathbb{R}^k$

$$\varphi_\eta(\bar{s}) = e^{i(\bar{b}, \bar{s})} \varphi_\xi(A^T \bar{s}).$$

Замечание 2.2. Следует отметить, что в Предложении 2.3 никаких ограничений на размерности d и k случайных векторов не накладывается. В частности, например, можно рассматривать случаи $k < d$ (то есть вырожденных линейных преобразований) или даже $k = 1$.

Предложения 2.2 и 2.3 показывают, когда при решении задач техника характеристических функций может оказаться удобнее техники непосредственной работы с многомерными распределениями: это имеет место в случае линейных преобразований, а также в случае, когда координаты случайного вектора независимы.