

# Комментарии к теме «Характеристические функции»

Практические занятия по теории вероятностей

кафедра статистического моделирования <http://statmod.ru>, матмех СПбГУ, 2016 г.

## 1 Определение и основные свойства

Сначала сделаем следующее замечание. Пусть  $\eta_1, \eta_2$  — случайные величины с конечными математическими ожиданиями. Положим  $\eta = \xi_1 + i\xi_2$ , где  $i$  — мнимая единица. Тогда математическим ожиданием  $\eta$  называется комплексное число  $E\eta = E\xi_1 + iE\xi_2$ .

Все основные свойства обычных математических ожиданий (возможно, с «адаптацией») переносятся и на комплексный случай. В частности (проверьте это!), среднее значение произведения независимых<sup>1</sup> комплекснозначных случайных величин равно произведению их средних значений.<sup>2</sup>

**Определение 1.1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство и  $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Тогда комплекснозначная функция вещественной переменной

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi) \quad (1.1)$$

называется *характеристической функцией* случайной величины  $\xi$ .

Отметим, что математическое ожидание в правой части (1.1) существует при любом  $t \in \mathbb{R}$ .

Из общих свойств математического ожидания видно, что

$$\varphi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathcal{P}_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \mathcal{P}_\xi(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) \mathcal{P}_\xi(dx), \quad (1.2)$$

где  $\mathcal{P}_\xi$  — распределение случайной величины  $\xi$ . Отсюда сразу же следует, что характеристическая определяется не самой случайной величиной, а ее распределением. Поэтому можно говорить о характеристической функции любого распределения  $\mathcal{P}$ .<sup>3</sup>

Если распределение  $\mathcal{P}_\xi$  задано таблицей распределения

$$\mathcal{P}_\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

то  $\varphi_\xi(t) = \sum_n e^{itx_n} p_n$ , а если это распределение обладает плотностью  $p_\xi$ , то

$$\varphi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} p_\xi(x) dx. \quad (1.4)$$

Самое важное свойство характеристических функций можно сформулировать так.

**Теорема 1.1.** (Теорема единственности) Пусть  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  — распределения с характеристическими функциями  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Если  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ .<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Случайные величины  $\xi_1 + i\xi_2$  и  $\eta_1 + i\eta_2$  объявляются независимыми, если пары  $(\xi_1, \xi_2)$  и  $(\eta_1, \eta_2)$  независимы.

<sup>2</sup>если только все три математических ожидания существуют.

<sup>3</sup>Или о преобразовании Фурье этого распределения.

<sup>4</sup>Одно из самых «прямых» доказательств Теоремы 1.1 основано на том, что конечные линейные (с комплексными коэффициентами) комбинации мнимых экспонент вида  $e^{itx}$  с различными  $t \in \mathbb{R}$  плотны в (комплекснозначном)  $\mathbb{L}^2(dM)$  для любой конечной меры  $M$ . Тогда, аппроксимируя индикатор  $1_A(x)$  некоторого измеримого множества  $A$  с помощью сумм вида  $\sum_k c_k e^{itx_k}$  в  $\mathbb{L}^2(d\mathcal{P}_\xi)$ , мы придем к выводу, что вероятность  $\mathcal{P}_\xi(A)$  может быть сколь угодно точно аппроксимирована суммами вида  $\sum_k c_k \varphi_\xi(t_k)$ . Конечно, все это нужно делать аккуратно.

Прокомментируем это утверждение. Очевидно (см. формулу (1.2)), что характеристическая функция  $\varphi_\xi$  полностью определяется распределением  $\mathcal{P}_\xi$ . Теорема 1.1 утверждает, что верно и обратное. Тем самым у нас появляется (в дополнении к функции распределения, таблице распределения или плотности) еще одна характеристика, полностью определяющая такой сложный объект, как распределение. Иначе говоря, если наша задача состоит в том, чтобы найти некоторое распределение, то найденная характеристическая функция этого распределения является, в принципе, правильным (хотя, может быть, не очень наглядным и не очень пригодным к дальнейшему использованию) ответом.

В общем случае, видимо, не существует простого<sup>5</sup> способа восстановления распределения по его характеристической функции, но иногда это вполне возможно. Например, если характеристическая функция  $\varphi_\xi$  суммируема на всей прямой, то как несложно доказать, у распределения  $\mathcal{P}_\xi$  существует непрерывная плотность, равная

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt. \quad (1.5)$$

Конечно, формула (1.5) является просто-напросто вариантом обратного преобразования Фурье.

**Простейшие свойства.** Приведем некоторые элементарные свойства характеристических функций.

1. Для любого  $t \in \mathbb{R}$  имеет место неравенство  $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$ . При этом  $\varphi_\xi(0) = 1$ .
2. Любая характеристическая функция равномерно непрерывна на всей прямой.
3. Если  $a, b$  — постоянные, то  $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb} \varphi_\xi(at)$ .
4. Если  $\varphi_\xi$  — характеристическая функция случайной величины  $\xi$ , то  $\varphi_\xi(-t) = \overline{\varphi_\xi(t)} = \varphi_{-\xi}(t)$ .
5. Характеристическая функция  $\varphi$  вещественна тогда и только тогда, когда она четная.
6. Характеристическая функция  $\varphi$  случайной величины  $\xi$  вещественна тогда и только тогда, когда  $\mathcal{L}(-\xi) = \mathcal{L}(\xi)$ .
7. Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$ . Обратное, вообще говоря, не верно.
8. Пусть распределение  $\mathcal{P}$  представлено в виде  $\mathcal{P} = \sum_n p_n \mathcal{P}_n$ , где  $\mathcal{P}_n$  — вероятностные меры,  $p_n \geq 0$  и  $\sum_n p_n = 1$ . Обозначим  $\varphi$  и  $\varphi_n$  характеристические функции распределения  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_n$  соответственно. Тогда  $\varphi = \sum_n p_n \varphi_n$ .

**Замечание 1.1.** Эти свойства показывают, что характеристические функции удобны при линейных преобразованиях случайных величин и сложении независимых случайных величин.

Пусть характеристическая функция  $\varphi_\xi$  не только суммируема, но и вещественна. Тогда (поскольку  $\varphi_\xi$  — четная функция),<sup>6</sup> равенство (1.5) переписывается как

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \varphi_\xi(t) dt. \quad (1.6)$$

и плотность  $p_\xi$  тоже является четной функцией. Если  $\varphi_\xi$  еще и неотрицательна то, обозначая  $c = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi(t) dt$  видим, что функция  $q = \varphi/c$  является плотностью некоторого распределения  $\mathcal{Q}$  и, следовательно,<sup>7</sup> функция  $\psi = 2\pi p_\xi/c$  является характеристической функцией этого распределения.

<sup>5</sup>Так называемую «формулу обращения», приводимую в большинстве учебников и выражющую функцию  $F_\xi$  через характеристическую функцию  $\varphi_\xi$ , нельзя признать очень привлекательной. К тому же она нам не понадобится.

<sup>6</sup>См. свойства характеристических функций.

<sup>7</sup>Сравните (1.4) и (1.6)!

Эти простые соображения помогают находить характеристические функции некоторых распределений без всяких вычислений.

Другие часто используемые свойства характеристических функций относятся к их связи с моментами  $m_k = \mathbb{E}\xi^k$  случайных величин.

**Предложение 1.1.** 1. Если  $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$  при некотором целом  $k \geq 1$ , то характеристическая функция  $\varphi_\xi$  является  $k$  раз непрерывно дифференцируемой в  $\mathbb{R}$ . При этом  $\varphi_\xi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}(\xi^k e^{i\xi t})$ . В частности,  $\varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k m_k$ .

2. Если  $k$  — четное и существует производные  $\varphi_\xi^{(k)}(0)$ , то  $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$ .<sup>8</sup>

3. Пусть  $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$ . Тогда при  $t \rightarrow 0$

$$\varphi_\xi(t) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(it)^j}{j!} m_j + o(|t|^k).$$

Конечно, последнее равенство — простое следствие из формулы Тейлора.

Приведем вид характеристических функций для наиболее популярных распределений.

Таблица 1: Характеристические функции некоторых дискретных распределений

| Распределение           | Обозначение    | Характеристическая функция    |
|-------------------------|----------------|-------------------------------|
| Дирака ( $a$ )          | $\delta_a$     | $e^{ita}$                     |
| Бернулли ( $p$ )        | Ber( $p$ )     | $1 - p + p e^{it}$            |
| Биномиальное ( $n, p$ ) | Bin( $n, p$ )  | $(1 - p + p e^{it})^n$        |
| Геометрическое ( $p$ )  | Geom( $p$ )    | $\frac{p}{1 - (1 - p)e^{it}}$ |
| Пуассона ( $\lambda$ )  | $\Pi(\lambda)$ | $e^{\lambda(e^{it}-1)}$       |

Таблица 2: Характеристические функции некоторых абсолютно непрерывных распределений

| Распределение                                  | Обозначение        | Характеристическая функция            |
|--|--------------------|---------------------------------------|
| Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$  | U( $a, b$ )        | $\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b - a)}$ |
| Равномерное распределение на отрезке $[-a, a]$ | U( $-a, a$ )       | $\sin(at)/at$                         |
| Показательное распределение ( $\lambda$ )      | Exp( $\lambda$ )   | $\frac{\lambda}{\lambda - it}$        |
| Нормальное распределение ( $a, \sigma^2$ )     | N( $a, \sigma^2$ ) | $e^{ita - \sigma^2 t^2/2}$            |
| Стандартное нормальное распределение           | N( $0, 1$ )        | $e^{-t^2/2}$                          |

**Упражнение.** Используя приведенные свойства характеристических функций, а также Таблицу 2, и не производя никаких прямых вычислений, докажите, что

<sup>8</sup>Для нечетного  $k$  это свойство, вообще говоря, неверно.

- двустороннее показательное распределение (распределение Лапласа) с параметром  $\lambda > 0$ , определяемое плотностью

$$p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

имеет характеристическую функцию  $\varphi(t) = \lambda^2/(\lambda^2 + t^2)$ ;

- распределение Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

имеет характеристическую функцию  $\varphi(t) = e^{-|t|}$ ;

- треугольное распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), \quad x \in [-a, a], \quad a > 0$$

имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \frac{2(1 - \cos(at))}{a^2 t^2};$$

- распределение с плотностью<sup>9</sup>

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(ax)}{ax^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0$$

имеет характеристическую функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|/a & \text{при } t \in [-a, a], \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

- если случайная величина  $\xi$  с характеристической функцией  $\varphi_\xi$  обладает конечным абсолютным моментом  $E|\xi|^{2k}$  при некотором целом  $k \geq 1$ , то существует такая постоянная  $c_k$ , что функция  $\psi(t) = c_k \varphi_\xi^{(2k)}(t)$  является характеристической функцией некоторого распределения.<sup>10</sup>

Поскольку каждая характеристическая функция определяет некоторое распределение (и, конечно, наоборот), то возникает естественный вопрос: какие комплекснозначные функции вещественной переменной являются преобразованиями Фурье некоторой вероятностной меры?<sup>11</sup> Для ответа на этот вопрос нам понадобится следующее определение.

**Определение 1.2.** Комплекснозначная функция  $\psi$  называется *неотрицательно определенной*, если для любого  $n \geq 1$ , любых вещественных  $t_1, \dots, t_n$  и любых комплексных  $z_1, \dots, z_n$  выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^n \psi(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0. \tag{1.7}$$

**Теорема 1.2.** (Теорема Бонхера-Хинчина).

1. Любая характеристическая функция является неотрицательно определенной.
2. Пусть  $\psi$  — неотрицательно определенная функция. Если  $\psi(0) = 1$  и если функция  $\psi$  непрерывна в нуле, то она является характеристической функцией некоторого распределения.

---

<sup>9</sup>Это распределение не имеет специального названия и интересно видом своей характеристической функции.

<sup>10</sup>Какого?

<sup>11</sup>Все перечисленные выше свойства характеристических функций являются для этого лишь необходимыми условиями.

**Замечание 1.2.** 1. Доказательство первого утверждения Теоремы 1.2 достаточно просто: при  $\psi = \varphi_\xi$  достаточно представить левую часть неравенства (1.7) в виде  $E|\sum_{k=1}^n e^{it_k z_k}|^2$ . Для доказательства второго (основного) утверждения нужно потратить гораздо больше усилий.

2. В принципе, при помощи неравенства (1.7) можно пытаться проверять, является ли некоторая функция характеристической. Но, как правило, это достаточно трудоемкая процедура.

3. Попробуйте непосредственно из неравенства (1.7) вывести некоторые простейшие (например, первое, второе и четвертое) свойства характеристических функций. При этом, конечно, нужно предполагать, что и другие условия второго пункта Теоремы 1.2 тоже выполнены.

**Замечание 1.3.** Из теоремы Боннера-Хинчина вытекает следующий факт. Пусть  $\varphi_n$  — последовательность характеристических функций, причем при любом  $t \in \mathbb{R}$  последовательность  $\varphi_n(t)$  имеет предел  $\varphi(t)$ . Тогда  $\varphi$  — неотрицательно определенная функция.

Если к тому же  $\varphi$  непрерывна в нуле, она является характеристической некоторого распределения.

## 2 Характеристические функции случайных векторов

**Определение 2.1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  — вероятностное пространство и

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$$

—  $d$ -мерный случайный вектор. Тогда комплекснозначная функция  $\varphi_\xi$ , определенная в  $\mathbb{R}^d$  равенством

$$\varphi_\xi(\bar{t}) = \varphi_{\xi_1 \dots \xi_d}(t_1, \dots, t_d) = Ee^{i(\bar{t}, \bar{\xi})} = Ee^{i \sum_{k=1}^d t_k \xi_k} \quad \text{с } \bar{t} = (t_1, \dots, t_d)^T$$

называется *характеристической функцией* случайного вектора  $\bar{\xi}$ .

Поскольку при  $d = 1$  это определение совпадает с определением характеристической функции случайной величины, то не удивительно, что многие свойства характеристических функций случайных векторов аналогичны одномерному случаю.<sup>12</sup> Например, если обозначить  $\mathcal{P}_\xi$  распределение  $\bar{\xi}$ , то окажется, что

$$\varphi_\xi(\bar{t}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\bar{t}, \bar{x})} \mathcal{P}_\xi(d\bar{x}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i \sum_{k=1}^d t_k x_k} \mathcal{P}_\xi(dx_1 \dots dx_d), \quad \text{где } \bar{x} = (x_1, \dots, x_d)^T.$$

В случае, когда распределение  $\mathcal{P}_\xi$  является абсолютно непрерывным, без труда выписывается аналог формулы (1.2).

Точно так же, как и при  $d = 1$ , имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Пусть  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$  — распределения в  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$  с характеристическими функциями  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Если  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ .

Легко выписать « $d$ -мерные аналоги» простейших свойств характеристических функций (одномерных) случайных величин. Например,<sup>13</sup>

1. если  $\bar{t} \in \mathbb{R}^d$ , то  $|\varphi_\xi(\bar{t})| \leq 1$ , причем  $\varphi_\xi(\mathbf{0}) = 1$ , где  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^d$ ;
2. любая характеристическая функция  $d$ -мерного случайного вектора равномерно непрерывна в  $\mathbb{R}^d$ ;

<sup>12</sup>Поэтому они специально не комментируются.

<sup>13</sup>Остальные свойства запишите сами.

3. если  $a \in \mathbb{R}$  и  $\bar{b} \in \mathbb{R}^d$  — постоянные и  $\bar{\eta} = a\bar{\xi} + \bar{b}$ , то  $\varphi_\eta(\bar{t}) = e^{i(\bar{t}, \bar{b})} \varphi_\xi(a\bar{t})$ ;
4. характеристическая функция  $\varphi$  случайного вектора  $\bar{\xi}$  вещественна тогда и только тогда, когда  $\mathcal{L}(-\bar{\xi}) = \mathcal{L}(\bar{\xi})$ .
5. если случайные вектора  $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in \mathbb{R}^d$  независимы и  $\bar{\beta} = \bar{\xi} + \bar{\eta}$ , то  $\varphi_\beta(\bar{t}) = \varphi_\xi(\bar{t})\varphi_\eta(\bar{t})$ . Обратное, вообще говоря, не верно.
6. пусть распределение  $\mathcal{P}$ , заданное в  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ , представлено в виде  $\mathcal{P} = \sum_n p_n \mathcal{P}_n$ , где  $\mathcal{P}_n$  — вероятностные меры,  $p_n \geq 0$  и  $\sum_n p_n = 1$ . Обозначим  $\varphi$  и  $\varphi_n$  характеристические функции распределения  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_n$  соответственно. Тогда  $\varphi = \sum_n p_n \varphi_n$ .

Из утверждения, аналогичного Предложению 1.1, мы приведем здесь лишь ту ее часть, которая будет использоваться в дальнейшем.

**Предложение 2.1.** Пусть координаты  $\xi_1, \dots, \xi_d$  случайного вектора  $\bar{\xi}$  обладают конечными вторыми моментами. Обозначим  $\varphi_\xi$  характеристическую функцию случайного вектора  $\bar{\xi}$ . Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Для любого  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_d)^\top$  и любых  $1 \leq j, k \leq d$  существуют частные производные  $\partial\varphi_\xi(\bar{t})/\partial t_j$  и  $\partial^2\varphi_\xi(\bar{t})/\partial t_j \partial t_k$ . Кроме того,

$$\frac{\partial\varphi_\xi(\bar{t})}{\partial t_j} \Big|_{\bar{t}=\mathbf{0}} = iE\xi_j \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\varphi_\xi(\bar{t})}{\partial t_j \partial t_k} \Big|_{\bar{t}=\mathbf{0}} = -E\xi_j \xi_k.$$

2. Если  $\|\bar{t}\| \rightarrow 0$ , то

$$\varphi_\xi(\bar{t}) = 1 + i(E\bar{\xi}, \bar{t}) - \frac{1}{2}(S\bar{t}, \bar{t}) + o(\|\bar{t}\|^2), \quad (2.1)$$

где  $S = E\bar{\xi}\bar{\xi}^\top = \{E\xi_j \xi_k\}_{j,k=1}^d$ .

Заметим, что при  $E\bar{\xi} = \mathbf{0}$  равенство (2.1) превращается в

$$\varphi_\xi(\bar{t}) = 1 - \frac{1}{2}(\Sigma_\xi \bar{t}, \bar{t}) + o(\|\bar{t}\|^2),$$

где  $\Sigma_\xi$  — ковариационная матрица вектора  $\bar{\xi}$ .

Наконец, отметим два специфических свойства характеристических функций (многомерных) случайных векторов. Первое из них относится к понятию независимости.

Пусть  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)^\top$  — случайный вектор с характеристической функцией  $\varphi_{\xi_1 \dots \xi_d}(t_1, \dots, t_d)$ .

**Предложение 2.2.** Для того, чтобы случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_d$  были независимы, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_{\xi_1 \dots \xi_d}(t_1, \dots, t_d) = \prod_{k=1}^d \varphi_{\xi_k}(t_k),$$

где  $\varphi_{\xi_k}$  — характеристическая функция случайной величины  $\xi_k$ .

**Замечание 2.1.** Необходимость в Предложении 2.2 следует из общих свойств математических ожиданий. Для доказательства достаточности можно рассмотреть независимые случайные величины  $\eta_k$  с  $\mathcal{L}(\eta_k) = \mathcal{L}(\xi_k)$  и воспользоваться теоремой единственности (Теорема 2.1).

Следующее свойство характеристических функций возможность относительно легко работать с линейными преобразованиями случайных векторов. Хотя оно доказывается просто и «в лоб», оформим его в виде отдельного утверждения.

**Предложение 2.3.** Пусть  $\bar{\xi}$  —  $d$ -мерный случайный вектор с характеристической функцией  $\varphi_\xi$ . Рассмотрим матрицу  $A : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^k$  и вектор  $\bar{b} \in \mathbb{R}^k$ . Наконец, положим  $\bar{\eta} = A\bar{\xi} + \bar{b}$  и обозначим характеристическую функцию этого вектора  $\varphi_\eta$ . Тогда при  $\bar{s} \in \mathbb{R}^k$

$$\varphi_\eta(\bar{s}) = e^{i(\bar{b}, \bar{s})} \varphi_\xi(A^\top \bar{s}).$$

**Замечание 2.2.** Следует отметить, что в Предложении 2.3 никаких ограничений на размерности  $d$  и  $k$  случайных векторов не накладывается. В частности, например, можно рассматривать случаи  $k < d$  (то есть вырожденных линейных преобразований) или даже  $k = 1$ .

Предложения 2.2 и 2.3 показывают, когда при решении задач техника характеристических функций может оказаться удобнее техники непосредственной работы с многомерными распределениями: это имеет место в случае линейных преобразований, а также в случае, когда координаты случайного вектора независимы.