Комментарии к теме “*Распределения случайных векторов*”

Практические занятия по теории вероятностей, 322 гр., СМ

В. В. Некруткин, 2012

1 Случайные вектора и их распределения

Многие свойства случайных векторов и их распределений аналогичны свойствам (одномерных) случайных величин. Такие свойства будут комментироваться кратко, более подробно будут разбираться специфические свойства, возникающие именно из-за многомерности случайных векторов.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство. Как уже говорилось, понятие случайной величины как измеримого отображения $(\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}$, возникло из потребности формализовать понятие измерения, проводимого при случайном эксперименте, а также из необходимости вычислять шансы того, что результат этого измерения будет принадлежать всевозможным (разумным, то есть борелевским) множествам на прямой.

Понятие случайного вектора соответствует тому, что при случайном эксперименте производится одновременно несколько измерений. Например, при стрельбе по мишени мы можем интересоваться как расстоянием от (точечной) пробоины до центра мишени, так и полярным углом, соответствующим этой пробоине — здесь случайный вектор будет двумерным. А если в результате каким-то образом организованного случайного эксперимента мы выбираем человека из толпы, то нас может интересовать совместное поведение его возраста, роста и веса. Тогда соответствующий случайный вектор будет трехмерным.

По аналогии с (одномерными) случайными величинами мы приходим сразу же к следующему определению.

Определение 1.1. По определению, d-мерный[1] случайный вектор $\overline{\xi}$ — это измеримое отображение $\overline{\xi} : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$, где $\mathcal{B}_d$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}^d$.

Следующее утверждение проясняет это определение.

Предложение 1.1. *Для того, чтобы отображение $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ было случайным вектором, необходимо и достаточно, чтобы все координатные отображения $\xi_j : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ были случайными величинами.*[2]

Предложение 1.1 дает возможность рассматривать случайный вектор либо как единый d-мерный случайный объект (см. Определение 1.1[3]), либо просто как d координатных случайных величин. В зависимости от обстоятельств бывает удобно пользоваться как одной так и другой интерпретацией.

Понятие распределения случайного вектора тоже автоматически переносится с одномерного случая.

---

[1] Размерность случайного вектора обозначена буквой d по ассоциации со словом «dimension».

[2] То есть были измеримы как отображения $(\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

[3] Развивая эту концепцию, можно для абстрактного измеримого пространства $(D, \mathcal{A})$ ввести понятие *случайной величины со значениями в D* как измеримого отображения $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$.

Определение 1.2. Пусть $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^d$ — случайный вектор. Для каждого множества $B \in \mathcal{B}_d$ положим $\mathcal{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\overline{\xi} \in B)$. Тогда вероятностная мера[4] $\mathcal{P}_\xi$, определенная на σ-алгебре $\mathcal{B}_d$, называется *распределением случайного вектора* $\overline{\xi}$.

Замечание 1.1. Определение 1.2 соответствует интерпретации случайного вектора $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ как единого случайного объекта. Если акцент стоит на (совместном) поведении координат ξ_j этого вектора, то говорят о *совместном распределении случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_d$.

Опять же, как и в одномерном случае, имеет место следующее утверждение, которое позволяет говорить о конкретном многомерном распределении безотносительно наличия соответствующего случайного вектора.

Предложение 1.2. *Какова бы ни была вероятностная мера* $\mathcal{P}$, *определенная на* σ-*алгебре* $\mathcal{B}_d$ *борелевских подмножеств* $\mathbb{R}^d$, *существует такое вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и такой случайный вектор* $\overline{\xi}$, *что распределение* $\mathcal{L}(\overline{\xi})$ *этого случайного вектора равно* $\mathcal{P}$.[5]

2 Как описывать распределения случайных векторов?

В принципе, здесь снова все аналогично одномерному случаю: наиболее простыми для описания оказываются дискретные и абсолютно непрерывные распределения.

2.1 Многомерные дискретные распределения

Многомерное (d-мерное) дискретное распределение случайного вектора $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ можно задавать таблицей распределения, которая выглядит как

$$\mathcal{P}_\xi : \quad \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где X_j уже не числа, а различные d-мерные вектора. Что касается вероятностей p_i, то они определяются как $p_i = \mathbb{P}(\overline{\xi} = X_i)$ и считаются положительными. Конечно, предполагается, что $\sum_i p_i = 1$.

Если же нас больше волнует совместное поведение координат вектора $\overline{\xi}$, то можно действовать по-другому.

Чтобы избежать излишней громоздкости, рассмотрим случай $d = 2$, то есть случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$. Ясно, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 тоже дискретны. Обозначим $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ и $y_1, \ldots, y_m, \ldots$ всевозможные значения этих случайных величин.[6] Тогда распределение $\mathcal{P}_\xi$ будет полностью определяться всевозможными тройками (x_i, y_j, p_{ij}), где

$$p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j).$$

В отличие от чисел p_i в (2.1), вероятности p_{ij} при некоторых i и j вполне могут быть нулевыми, их сумма равна единице.

При этом, так как

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_i) = \sum_j \mathbb{P}(\xi_1 = x_i,\, \xi_2 = y_j) = \sum_j p_{ij},$$

то распределение отдельных координат дискретного случайного вектора очень просто выражается через совместное распределение всех его координат.

Таким образом, нахождение распределения дискретного случайного вектора — это просто вычисление (или задание) вероятностей некоторых событий.[7]

[4]То, что $\mathcal{P}_\xi$ является вероятностной мерой, конечно, требует формального доказательства. Оно проводится точно так же, как в одномерном случае.

[5]Идея построения точно такая же, как и в одномерном случае, только нужно взять нужно взять $\Omega = \mathbb{R}^d$ и $\mathcal{F} = \mathcal{B}_d$.

[6]Подразумевается, что $\mathbb{P}(\xi_1 = x_i) > 0$ и $\mathbb{P}(\xi_2 = y_j) > 0$ при любых i, j.

[7]С дискретными многомерными распределениями как таковыми мы будем мало иметь дело — здесь, вообще

2.2 Многомерные абсолютно непрерывные распределения

Определение и основные свойства многомерных абсолютно непрерывных распределений в точностью повторяют одномерный случай.

Определение 2.1. Говорят, что случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ имеет *абсолютно непрерывное* (сокращенно — а.н.) распределение, если существует такая (измеримая) функция $p_\xi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, что для любого $B \in \mathcal{B}_d$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}(\overline{\xi} \in B) = \mathcal{P}_\xi(B) = \int_B p_\xi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_B p_\xi(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_d, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d). \tag{2.2}$$

Функция p_ξ при этом называется *плотностью распределения* случайного вектора $\overline{\xi}$ или *совместной плотностью распределения случайных величин* $\xi_1, \ldots, \xi_d$. В последнем случае для плотности обычно применяют обозначение $p_{\xi_1 \ldots \xi_d}(x_1, \ldots, x_d)$.

Перечислим общие свойства плотности.

1. Если плотность распределения существует, то она единственна с точностью до множества d-мерной Лебеговой меры ноль.

2. Плотность является п. в. (по мере d-мерной мере Лебега) неотрицательной функцией.

3. $$\int_{\mathbb{R}^d} p_\xi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1.$$

4. Если существует такая (измеримая) функция $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, что для любого $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$
$$\mathbb{P}(\xi_1 < y_1, \ldots, \xi_d < y_d) = \int_{-\infty}^{y_1} \ldots \int_{-\infty}^{y_d} \varphi(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \ldots dx_d,$$
то φ является плотностью распределения случайного вектора $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$.

5. Конечно, свойства 1 – 4 — это те же свойства, которые рассматривались в одномерном случае. При $d > 1$ возникает следующий вопрос.

   Пусть случайный вектор $\overline{\xi}$ обладает плотность распределения p_ξ. Составим из координат вектора $\overline{\xi}$ некоторый подвектор $\overline{\eta}$ меньшей размерности.[8] Что можно сказать о распределении случайного вектора $\overline{\eta}$?

   Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении, где для простоты записи рассматривается подвектор, состоящий из первых $k < d$ компонент вектора $\overline{\xi}$.

   Предложение 2.1. *Если случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ обладает плотностью распределения $p_\xi(x_1, \ldots, x_d)$, то при $1 \le k < d$ случайный вектор $\overline{\eta} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)^{\mathrm{T}}$ является абсолютно непрерывным с плотностью*
$$p_\eta(x_1, \ldots, x_k) = \int_{\mathbb{R}^{d-k}} p_\xi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_d) dx_{k+1} \ldots dx_d. \tag{2.3}$$

говоря, нет принципиальных сложностей. Чтобы убедиться в этом, решите такую задачу.
Задача. Правильную игральную кость подбрасывают до первого выпадения шестерки. Найти в этом эксперименте совместное распределение числа выпавших единиц и двоек.

[8] Подразумевается, что общий порядок координат вектора $\overline{\xi}$ остается в $\overline{\eta}$ неизменным.

Из равенства (2.3) легко понять, как будет выглядеть плотность распределения подвектора $\overline{\eta}$ в общем случае[9] — интегрирование в правой части (2.3) происходит по «свободным переменным» $x_{k+1}, \ldots, x_d$, которые соответствуют координатам вектора $\overline{\xi}$, не вошедшим в $\overline{\eta}$. Этот же принцип выдерживается всегда. Например, при $d = 2$

$$p_{\xi_1}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{\xi_1 \xi_2}(x, y) dy \quad \text{и} \quad p_{\xi_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{\xi_1 \xi_2}(x, y) dx,$$

а при $d = 4$

$$p_{\xi_2 \xi_3}(y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} p_{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4}(x, y, z, t) dx dt. \tag{2.4}$$

2.3 Функции распределения случайных векторов

Определение 2.2. Пусть $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^{\mathrm{T}}$ — случайный вектор. Функция $F_\xi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_d) = \mathbb{P}(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_d < x_d), \tag{2.5}$$

называется *функцией распределения* случайного вектора $\overline{\xi}$ или *совместной функцией распределения* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_d$. В последнем случае чаще употребляется обозначение $F_{\xi_1 \ldots \xi_d}$.

Конечно, это определение полностью аналогично одномерному случаю. Поэтому не удивительно, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть $\overline{\xi}$ — случайный вектор, $\mathcal{P}_\xi$ — его распределение и F_ξ — функция распределения. Тогда $\mathcal{P}_\xi$ однозначно определяется по F_ξ.*

Из всех свойств функции распределения (их много) мы здесь упомянем только те, которые будут использоваться при решении задач, причем для простоты записи ограничимся случаем $d = 2$.

1. *Как по функции распределения случайного вектора найти функцию распределения его подвектора?*

   Пусть $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$. Обозначим $F_{\xi_1 \xi_2}$ совместную функцию распределения случайных величин ξ_1, ξ_2, а F_{ξ_1} и F_{ξ_2} — соответственно (одномерные) функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2. Тогда[10]

   $$F_{\xi_1}(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{\xi_1 \xi_2}(x, y) \quad \text{и} \quad F_{\xi_1}(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{\xi_1 \xi_2}(x, y). \tag{2.6}$$

   Несколько неточно, но зато более наглядно[11] равенства (2.6) можно записать как

   $$F_{\xi_1}(x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x) = \mathbb{P}(\xi_1 < x, \xi_2 < +\infty) = F_{\xi_1 \xi_2}(x, +\infty)$$

   и

   $$F_{\xi_2}(y) = \mathbb{P}(\xi_2 < y) = \mathbb{P}(\xi_1 < +\infty, \xi_2 < y) = F_{\xi_1 \xi_2}(+\infty, y).$$

   Конечно, свойство (2.6) легко переписывается для произвольных подвекторов вектора $\overline{\xi}$: например, при $d = 4$[12]

   $$F_{\xi_2 \xi_3}(y, z) = \lim_{x, t \to +\infty} F_{\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4}(x, y, z, t).$$

---

[9] То есть при произвольном выборе подвектора $\overline{\eta}$.

[10] Очевидно, что функция распределения монотонно неубывает по каждому аргументу.

[11] Так как $\xi_1 < +\infty$ и $\xi_2 < +\infty$ с вероятностью 1.

[12] Сравните с равенством (2.4).

2. *Как связаны функция распределения и плотность распределения для абсолютно непрерывных распределений?*

   - Если случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ абсолютно непрерывен с плотностью распределения $p_{\xi_1\xi_2}$, то
   $$F_{\xi_1\xi_2}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{\xi_1\xi_2}(s,t)dsdt.$$
   Ясно, что это всего лишь частный случай равенства (2.2) с $d=2$ и $B=(-\infty,x)\times(-\infty,y)$.
   - Для любой функции распределения $F(x,y)$ при почти всех[13] (x,y) существует вторая смешанная производная $f(x,y) = \partial^2 F(x,y)/\partial x\partial y$.
     a) Если
     $$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1,$$
     то f — плотность распределения, порожденного функцией распределения F.
     b) Если случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ обладает плотностью распределения $p_{\xi_1\xi_2}$, то для почти всех (x,y)
     $$p_{\xi_1\xi_2}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{\xi_1\xi_2}(x,y)}{dxdy} \ .$$

3 Независимость случайных величин

При переходе от рассмотрения одной случайной величины к одновременному изучению нескольких случайных величин возникает новое и очень важное понятие.

Определение 3.1. Случайные величины[14] $\xi_1,\ldots,\xi_d$ называются *независимыми*,[15] если для любых борелевских подмножеств $B_1,\ldots,B_d$ прямой $\mathbb{R}$ случайные события $\{\xi_1\in B_1\},\ldots,\{\xi_d\in B_d\}$ являются независимыми.[16]

Это определение имеет очевидную (хотя и несколько неточную) интерпретацию — независимые случайные принимают свои значения независимо друг от друга.

Легко видеть,[17] что случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_d$ независимы тогда и только тогда, когда для любых борелевских множеств $B_1,\ldots,B_d$ выполняется равенство
$$\mathbb{P}\big(\xi_1\in B_1,\ldots,\xi_d\in B_d\big) = \prod_{i=1}^{d}\mathbb{P}\big(\xi_i\in B_i\big).$$

Существует эквивалентное, но более современное определение независимости случайных величин.[18] Чтобы его воспроизвести, нужно ввести дополнительные понятия. Первое из них относится к независимости семейств событий.

[13] По двумерной мере Лебега mes_2.

[14] Определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

[15] Точнее, *независимыми в совокупности*, но слова “в совокупности” обычно опускают.

[16] Это понятие дословно переносится на случай, когда ξ_i являются измеримыми отображениями в произвольные (не обязательно одинаковые) измеримые пространства. В частности, мы вполне можем говорить о том, что случайная величина и случайный вектор независимы.

[17] Необходимость очевидна. Достаточность следует из того, что некоторые из B_i можно положить равными $\mathbb{R}$.

[18] При решении задач оно не понадобится.

Определение 3.2. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство и $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d$ — некоторые семейства событий. Эти семейства называются независимыми, если при любом выборе $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_d \in \mathcal{A}_d$ события $A_1, \ldots, A_d$ оказывются независимыми.

Другое необходимое понятие связано относится к σ-алгебрам, порожденным измеримыми отображениями. Пусть $(D_1, \mathcal{D}_1)$, $(D_2, \mathcal{D}_2)$ — два измеримых пространства и h — измеримое отображение $(D_1, \mathcal{D}_1) \mapsto (D_2, \mathcal{D}_2)$. Обозначим $\sigma(h)$ семейство полных прообразов $\{h^{-1}(B), B \in \mathcal{D}_2\}$. По определению, $\sigma(h) \subset \mathcal{D}_1$. Более того, как легко доказать, $\sigma(h)$ является σ-алгеброй, которая называется *σ-алгеброй, порожденной отображением h.*

Так вот, характеризация независимости случайных величин в терминах порожденных ими σ-алгебр выглядит так: *случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_d$ являются независимыми тогда и только тогда, когда независимы σ-алгебры $\sigma(\xi_i)$.*

Следующее утверждение дает возможность выражать независимость случайных величин в терминах функций и плотностей распределений.

Предложение 3.1. *1. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_d$ — случайные величины с совместной функцией распределения $F_{\xi_1 \ldots \xi_d}$. Обозначим F_{ξ_i} функцию распределения случайной величины ξ_i. Тогда для того, чтобы случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_d$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_i \in \mathbb{R}$*

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_d}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} F_{\xi_i}(x_i). \tag{3.1}$$

2. Если дополнительно предположить, что у случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_d$ есть совместная плотность распределения $p_{\xi_1 \ldots \xi_d}$, то необходимым и достаточным условием независимости $\xi_1, \ldots, \xi_d$ будет равенство

$$p_{\xi_1 \ldots \xi_d}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} p_{\xi_i}(x_i), \tag{3.2}$$

где через p_{ξ_i} обозначена плотность распределения случайной величины ξ_i, а само равенство (3.2) *предполагается выполненным для почти всех точек $(x_1, \ldots, x_d)$ по d-мерной мере Лебега $\mathrm{mes_d}$.*

При решении задач проверку независимости случайных величин с помощью равенств (3.1) или (3.2) можно несколько упростить. Объясним соответствующий прием на примере $d = 2$.

Предположим, что для любых x, y

$$F_{\xi_1 \xi_2}(x, y) = G_1(x) G_2(y),$$

где G_1 и G_2 — некоторые функции. Устремляя y к плюс бесконечности, получим, что $F_{\xi_1}(x) = G_1(x) H$, где $H = \lim_{y \to +\infty} G_2(y)$. Отсюда сразу же приходим к (3.1), где (при $d = 2$) $F_{\xi_2}(y) = G_2(y)/H$. Таким образом, для независимости случайных величин достаточно, чтобы их совместная функция распределения распадалась в произведение функций от каждой переменной.

С плотностями аналогичная ситуация. Если для почти всех x, y

$$p_{\xi_1 \xi_2}(x, y) = g_1(x) g_2(y),$$

то $p_{\xi_1}(x) = g_1(x) h$ и $p_{\xi_2}(y) = g_2(y)/h$, где $h = \int g_2(y) dy$. Поэтому $p_{\xi_1 \xi_2}(x, y) = p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(y)$.

Для дискретных распределений понятие независимости случайных величин еще более упрощается. Например, если совместное распределение дискретных случайных величин ξ_1, ξ_2 записано в виде набора всевозможных троек (x_i, y_j, p_{ij}), где $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$ — множества значений ξ_1 и ξ_2 соответственно, а $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)$, то независимость ξ_1 и ξ_2 будет эквивалентна набору равенств

$$p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i)\, \mathbb{P}(\xi_2 = y_j),$$

которые должны выполняться при всех i, j.

В более общем случае, когда случайная величина ξ_1 дискретна с набором значений $\{x_i\}$, а ξ_2 имеет произвольное (не обязательно дискретное или абсолютно непрерывное) распределение, для установления независимости ξ_1 и ξ_2 достаточно проверить, что

$$\mathbb{P}(\xi_1 = x_i, \xi_2 < y) = \mathbb{P}(\xi_1 = x_i)\,\mathbb{P}(\xi_2 < y)$$

для всех x_i и $y \in \mathbb{R}$.

4 Два примера многомерных распределений

Равномерное распределение на окружности. Двумерный случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ является *равномерно распределенным на единичной окружности с центром в нуле*, если, во-первых, $\mathbb{P}\big(\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1\big) = 1$, и, во-вторых, полярный угол вектора $\overline{\xi}$ равномерно распределен на $[0, 2\pi)$.[19]

Первое из этих условий говорит, что значения вектора $\overline{\xi}$ всегда лежат на окружности, а второе — что вероятность его попадания на дугу длины γ единичной окружности пропорциональна γ (точнее, равна $\gamma/2\pi$).

Если обозначить полярный угол вектора $\overline{\xi}$ как φ, то окажется, что координаты случайного вектора, равномерно распределенного на окружности, имеют вид

$$\xi_1 = \cos(\varphi), \quad \xi_2 = \sin(\varphi), \quad \text{где} \;\; \varphi \in \mathrm{U}(0, 2\pi).$$

Равномерное распределение в области. Пусть D — измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$, причем $0 < \mathrm{mes}_d(D) < \infty$. Говорят, что случайный вектор $\overline{\xi}$ *равномерно распределен в* D, если его распределение абсолютно непрерывно с плотностью

$$p_\xi(\mathbf{x}) = \begin{cases} C & \text{при} \;\; \mathbf{x} \in D, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $\mathbf{x} \in D$, а постоянная C равна $1/\mathrm{mes}_d(D)$.

Такое определение позволяет говорить, например, о равномерном распределении в круге или шаре. В одномерном случае мы можем рассматривать, скажем, равномерное распределение на объединении отрезков $[0, 1]$ и $[2, 3]$.

5 Как искать распределения (одномерной) функции от случайного вектора

Пусть случайный вектор $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^d$ обладает плотностью распределения p_ξ и φ — некоторая измеримая функция $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. Нужно найти распределение случайной величины $\eta = \varphi(\overline{\xi})$.

В целом метод решения этой задачи такой же, как и в одномерном случае. А именно, по определению плотности распределения

$$\mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(\varphi(\overline{\xi}) < x) = \int_{\mathbf{t}:\, \varphi(\mathbf{t}) < x} p_\xi(\mathbf{t})\,d\mathbf{t}, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Для конкретных (и не очень сложных) плотностей p_ξ интеграл в правой части считается и ответ выдается либо в виде функции распределения F_η, либо в виде плотности p_η, если последняя существует.

[19] У нас всегда полярный угол любого двумерного вектора будет лежать между нулем и 2π.

Для некоторых функций φ плотность распределения p_η может быть подсчитана в общем виде. Приведем простейший пример.

Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2 имеют совместную плотность распределения $p_{\xi_1\xi_2}(s,t)$. Требуется найти распределение случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Согласно (5.1)

$$F_\eta(x) = \iint_{s+t<x} p_{\xi_1\xi_2}(s,t)\,ds\,dt. \tag{5.2}$$

Сделаем теперь в интеграле, стоящем в право части (5.2), замену переменных $u = s+t$, $t = t$. Поскольку якобиан этого линейного преобразования равен единице, то

$$F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{\mathbb{R}} p_{\xi_1\xi_2}(u-t,t)\,dt \right) du.$$

Следовательно (см. четвертое свойство плотности),

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{\xi_1\xi_2}(x-t,t)\,dt. \tag{5.3}$$

Этот же результат можно получить менее аккуратно, но зато более наглядно. Перепишем равенство (5.2) в виде

$$F_\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{-\infty}^{x-t} p_{\xi_1\xi_2}(s,t)\,ds$$

и формально продифференцируем это равенство, причем знаком «$\mathring{=}$» будем отмечать неаккуратные переходы.

$$\frac{dF_\eta(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{x-t} p_{\xi_1\xi_2}(s,t)\,ds \right) dt \mathring{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{x-t} p_{\xi_1\xi_2}(s,t)\,ds \right) dt \mathring{=}$$
$$\mathring{=} \int_{\mathbb{R}} p_{\xi_1\xi_2}(x-t,t)\,dt.$$

Результат совпадает с (5.3).

Следует отметить, что представление плотности $p_{\xi_1+\xi_2}$ в виде интеграла типа (5.3) не является единственным. Например, сделав в интеграле (5.3) замену переменной $s = x-t$, мы придем к выражению

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{\xi_1\xi_2}(s,x-s)\,ds.$$

Если исходные случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то (5.3) превращается в

$$p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{\xi_1}(x-t)p_{\xi_2}(t)\,dt.$$

Традиционно это равенство называется *формулой свертки.*