

Распределения случайных величин

В.В. Некруткин

кафедра статистического моделирования <http://statmod.ru>, матмех СПбГУ

Материал к практическим занятиям по теории вероятностей, 2013 г.

1 Случайные величины и их распределения

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где Ω — пространство элементарных событий,¹ \mathcal{F} — σ -алгебра событий,² \mathbb{P} — вероятностная³ мера, определенная на \mathcal{F} . Те задачи, которые мы решали до сих пор, были связаны с вычислением вероятностей $\mathbb{P}(A)$ для различных событий $A \in \mathcal{F}$. Сейчас появляется новое понятие.

Определение 1.1. *Случайной величиной* ξ (со значениями в \mathbb{R}) называется измеримое отображение $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где \mathcal{B} есть борелевская σ -алгебра подмножеств вещественной прямой.⁴

Напомним, что измеримость в данном случае означает, что соотношение

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} = \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

верно для любого $B \in \mathcal{B}$.

Понятие «случайная величина» возникает при измерении некоторой переменной, связанной со случайным экспериментом. Действительно, если наш случайный эксперимент состоит в «случайном» выборе элементарного события $\omega \in \Omega$, то измерение, проведенное на этом случайном эксперименте — это некоторая функция, сопоставляющая каждому ω какое-то число, обозначаемое $\xi(\omega)$. Иначе говоря — это функция $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.⁵

Приведем примеры.

1. Бросание трех различных игральных костей.

Здесь $\Omega = \{(i, j, k)\}$, где $i, j, k \in \{1, \dots, 6\}$. Если мы интересуемся суммой выпавших чисел, то появляется отображение $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, задаваемое формулой $\xi(i, j, k) = i + j + k$.

2. Стрельба по мишени.

Предполагая, что стрельба ведется без промаха, а пуля представляет собой точку, получаем, что пространство элементарных событий — эта сама мишень. Если нас интересует число очков, которое мы выбили, мы имеем дело с отображением ξ_1 , сопоставляющим каждой точке $\omega \in \Omega$ целое число, то есть снова с функцией. Другая функция $\xi_2 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ «отвечает» за расстояние от центра мишени до пробоины и т. д.

3. Ловля крокодилов.

Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий в том, что мы ловим крокодила в реке Нил.

¹множество элементарных, неделимых исходов случайного эксперимента.

²семейство тех подмножеств Ω , которые мы договорились считать «случайными событиями».

³нормированная на единицу.

⁴то есть минимальная σ -алгебра, содержащая все ячейки вида $[a, b)$.

⁵Такие функции (то есть случайные величины) в теории вероятностей принято обозначать греческими буквами.

Итог эксперимента — это либо пойманный (конкретный) крокодил, либо возвращение⁶ домой с пустыми руками.

Следовательно, множеством элементарных событий естественно считать множество крокодилов, населяющих Нил, плюс особую точку Δ , означающую неудачу мероприятия.

Вес пойманного крокодила, его длина, число зубов, стоимость — различные «измерения», связанные со случайным экспериментом.⁷ В нашей терминологии это различные случайные величины, определенные на одном и том же пространстве элементарных событий.

Разберемся теперь, откуда появляется требование измеримости отображения $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. В эксперименте с бросанием трех костей нас могут интересовать шансы выпадения большого числа очков, скажем, больше 13. На языке теории вероятностей это означает, что мы интересуемся вероятностью $\mathbb{P}(\xi > 13)$. Но отсюда следует, что множество $\{\omega : \xi(\omega) > 13\}$ должно быть событием, то есть должно принадлежать \mathcal{F} .⁸

В примере со стрельбой по мишени нас может интересовать шансы того, что пробоина находится на расстоянии не больше 5 мм от центра мишени, и тогда мы приходим к событию $\{\omega : \xi_2(\omega) \leq 5\}$.

А в эксперименте с крокодилом, если нас не волнуют крокодилы-младенцы и крокодилы-старички, мы приходим к необходимости считать событием множество $\{\omega : a < \xi(\omega) < b\}$ для некоторых a и b , где ξ — возраст пойманного крокодила.

Продолжая подобные рассуждения, мы видим, что \mathcal{F} -измеримыми должны быть всевозможные множества $\xi^{-1}(\langle a, b \rangle) = \{\omega : \xi(\omega) \in \langle a, b \rangle\}$,⁹ их конечные или счетные объединения, пересечения, дополнения и т.д., что и приводит к формальному требованию измеримости отображения ξ .

Определение 1.2. Пусть ξ является случайной величиной. Функция $\mathcal{P}_\xi : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$, определенная равенством $\mathcal{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\xi \in B)$ называется *распределением* случайной величины ξ .

Предложение 1.1. *Распределение \mathcal{P}_ξ случайной величины ξ является вероятностной мерой.*

Тем самым случайная величина ξ порождает еще одно вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathcal{P}_\xi)$.

Предложение 1.2. *Какова бы ни была вероятностная мера \mathcal{P} , определенная на σ -алгебре \mathcal{B} борелевских подмножеств \mathbb{R} , существует такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и такая случайная величина ξ , что распределение ξ равно \mathcal{P} .¹⁰*

Замечание 1.1. Тем самым мы можем употреблять термин *распределение*, даже если случайная величина у нас отсутствует, понимая под этим просто вероятностную меру, определенную на борелевских подмножествах прямой.

Тот факт, что случайная величина ξ имеет распределение \mathcal{P} , мы будем кратко записывать как $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{P}$. Буква \mathcal{L} расшифровывается как «Law», так как вместо «распределение» иногда говорят «закон распределения». В некоторых случаях вместо $\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{P}$ мы будем писать менее точное но более краткое $\xi \in \mathcal{P}$.

2 Дискретные и абсолютно непрерывные распределения.

Если нам известно распределение \mathcal{P}_ξ случайной величины ξ , то мы имеем полную информацию о том, с какой вероятностью ξ принимает разные значения. Сам объект \mathcal{P}_ξ , однако, очень сложен (борелевских множеств очень много), поэтому хочется иметь более простое (но эквивалентное) описание \mathcal{P}_ξ . Особенно легко это делается в двух случаях — когда случайные величины имеют дискретное или абсолютно непрерывное распределения.

⁶Будем оптимистами!

⁷Если это необходимо, можно доопределить эти функции в точке Δ каким-то отрицательным значением.

⁸По определению мы не имеем права писать $\mathbb{P}(A)$, если $A \notin \mathcal{F}$.

⁹Треугольные скобки $\langle a, b \rangle$ означают, что точки a и b могут принадлежать как этому интервалу, так и его дополнению.

¹⁰Идея построения следующая: нужно взять $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, $\mathbb{P} = \mathcal{P}$ и $\xi(\omega) = \omega$. Доказательство совсем простое.

Дискретные распределения.

Определение 2.1. Если существует такое конечное или счетное множество X , что $\mathbb{P}(\xi \in X) = \mathcal{P}_\xi(X) = 1$, то говорят, что случайная величина ξ является *дискретной* (или обладает *дискретным распределением*).

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.¹¹ Кроме этого, предположим, что $\mathbb{P}(\xi = x_i) = p_i > 0$ (если некоторые $p_i = 0$, то просто исключим соответствующие x_i из рассмотрения). Очевидно, $\sum_i p_i = 1$. Составим таблицу¹²

$$\mathcal{P}_\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Будем называть таблицу (2.1) *таблицей распределения случайной величины ξ* . Очевидно, таблица распределения полностью определяет само распределение:

$$\mathbb{P}(\xi \in B) = \mathcal{P}_\xi(B) = \sum_{i: x_i \in B} p_i$$

и поэтому для описания \mathcal{P}_ξ нам достаточно знать только эту таблицу.

В то же время распределение \mathcal{P}_ξ порождает множество таблиц этого распределения: достаточно в (2.1) переставить 2 столбца, чтобы получить новую таблицу, в то время как само распределение \mathcal{P}_ξ останется прежним. Тем не менее для краткости, рассматривая таблицу (2.1), мы будем иногда говорить о распределении \mathcal{P}_ξ , а не о конкретной таблице этого распределения.

Основные¹³ дискретные распределения. Перечислим основные дискретные распределения, с которыми нам придется сталкиваться и введем соответствующие обозначения.

1. *Распределение Дирака*¹⁴ δ_a , сосредоточенное в точке a , задается простейшей таблицей

$$\mathcal{P}_\xi : \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Распределение δ_a — это распределение случайной величины, тождественно равной a .

2. *Дискретное равномерное распределение* на множестве $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ имеет вид

$$\mathcal{P}_\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ n^{-1} & n^{-1} & \dots & n^{-1} \end{pmatrix}.$$

Интерпретация очевидна. Обозначение — $U_n(X)$.

3. *Распределение Бернулли* $\text{Ber}(p)$ с параметром $0 < p < 1$. Таблица распределения:

$$\mathcal{P}_\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Смысл распределения — это распределение числа успехов в одном испытании Бернулли с вероятностью успеха p .

¹¹Если X конечно, то последнего троеточия нет.

¹²Предполагается, что элементы множества X уже как-то упорядочены.

¹³В том смысле, что именно они, как правило, будут использоваться при решении задач.

¹⁴В другой терминологии — *дельта-мера*, сосредоточенная в точке a .

4. *Биномиальное распределение* $\text{Bin}(n, p)$ с параметрами $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $0 < p < 1$. Таблица распределения:

$$\mathcal{P}_\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

где $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Интерпретация — распределение числа успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p . При $n = 1$ совпадает с распределением Бернулли.

5. *Геометрическое распределение* $\text{Geom}(p)$ с параметром $0 < p < 1$:

$$\mathcal{P}_\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix},$$

где $p_k = p(1-p)^k$, $k \geq 0$. Имеет смысл распределения числа неудач до первого успеха в испытаниях Бернулли с вероятностью p .

Иногда под геометрическим распределением подразумевают распределение полного числа испытаний до первого успеха. Тогда вероятности остаются теми же, а к значениям случайной величины прибавляется единица. У нас (по определению) геометрическое распределение всегда соответствует числу неудач.

6. Распределение Пуассона $\Pi(\lambda)$ с параметром $\lambda > 0$:

$$\mathcal{P}_\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix},$$

где $p_k = \lambda^k e^{-\lambda} / k!$. Это очень распространенное распределение, одна из простейших интерпретаций¹⁵ — (предельное) распределение числа успехов в очень большом числе испытаний Бернулли с очень маленькой вероятностью успеха.

7. Отрицательное биномиальное распределение $\text{NB}(m, p)$ с параметрами $m \in \{1, 2, \dots\}$ и $0 < p < 1$:

$$\mathcal{P}_\xi: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_k & \dots \end{pmatrix},$$

где $p_k = C_{m+k-1}^k p^k (1-p)^m$. Смысл — распределение числа неудач до достижения m -го успеха.

Обратите внимание, что в последних трех примерах число значений случайных величин бесконечно (счетно).

Абсолютно непрерывные распределения.

Определение 2.2. Говорят, что случайная величина ξ имеет *абсолютно непрерывное*¹⁶ *распределение*, если существует такая функция p_ξ , что для любого $B \in \mathcal{B}$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}(\xi \in B) = \mathcal{P}_\xi(B) = \int_B p_\xi(x) dx. \quad (2.2)$$

Функция p_ξ при этом называется *плотностью распределения* случайной величины ξ .¹⁷ А саму случайную величину ξ для краткости тоже называют абсолютно непрерывной.

¹⁵Вспомните предельную теорему Пуассона!

¹⁶сокращенно — а.н.

¹⁷Для тех, кто знает производные Радона-Никодима: плотность p_ξ является производной Р.-Н. распределения \mathcal{P}_ξ по мере Лебега, условия существования плотности — это условия абсолютной непрерывности меры \mathcal{P}_ξ по мере Лебега.

Таким образом, в абсолютно непрерывном случае нам достаточно знать всего лишь одну функцию p_ξ , что бы иметь возможность восстановить все распределение.¹⁸

Отметим, что абсолютно непрерывное распределение не является дискретным, так как для него

$$\mathbb{P}(\xi = a) = \int_{\{a\}} p_\xi(dx) = 0$$

при любом $a \in \mathbb{R}$.

Перечислим общие свойства плотности.

1. Если плотность распределения существует, то она единственна с точностью до множества Лебеговой меры ноль.¹⁹
2. Плотность является п. в. (по мере Лебега) неотрицательной функцией.²⁰
- 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

(для доказательства достаточно взять в (2.2) $B = \mathbb{R}$).

4. Если существует такая функция $\varphi(x)$, что для любых $a < b$

$$\mathbb{P}(a < \xi < b) = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

то $\varphi(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ .

5. Если существует такая функция $\varphi(x)$, что для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\xi < y) = \int_{-\infty}^y \varphi(x)dx,$$

то $\varphi(x)$ — плотность распределения случайной величины ξ .

Замечание 2.1. 1. Таким образом, у абсолютно непрерывной случайной величины существует не одна плотность распределения, а целый класс эквивалентных плотностей. При решении задач, конечно, из этого класса функций выбирается какая-то одна, наиболее удобная. Например, если существует непрерывный (или кусочно-непрерывный) вариант плотности распределения, но с ним и нужно иметь дело.

2. Последние два свойства говорят о том, что для проверки существования плотности не нужно проверять равенство (2.2) для всех борелевских множеств B . Достаточно в качестве B брать всевозможные интервалы или даже всевозможные полупрямые.

3. Пусть в нас есть неотрицательная измеримая функция p , заданная на прямой. Если при этом $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$, то равенства

$$\mathcal{P}(B) = \int_B p(x)dx, \quad B \in \mathcal{B},$$

задают вероятностную меру на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Тем самым (см. Предложение 1.2 и Замечание 1.1) мы можем говорить о распределении с плотностью p , не имея в виду никакой конкретной случайной величины.²¹

¹⁸А в дискретном случае достаточно знать таблицу распределения.

¹⁹Свойство понятно: если изменить плотность в нескольких точках, то все интегралы (2.2) останутся теми же.

²⁰Иначе при каком-то B интеграл в правой части (2.2) был бы отрицательным.

²¹На самом деле аналогичное замечание может быть сделано и о дискретных распределениях с заменой плотности распределения на его таблицу.

Основные абсолютно непрерывные распределения.

1. *Равномерное распределение* $U(a, b)$ на отрезке $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$. Задаётся плотностью

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Смысл понятен: вероятность попасть случайной величине в отрезок длины ε , находящийся внутри $[a, b]$, не зависит от расположения этого отрезка (а только от его длины). Отметим, что значения плотности в точках a и b не существенны.

2. *Показательное*²² распределение $\text{Exp}(\lambda)$ с параметром $\lambda > 0$. Плотность имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Такое распределение часто имеют случайные величины типа «времени жизни» (в общем случае — типа «времени до наступления какого-то события»). В частности, время полного распада атома радиоактивного вещества имеет именно показательное распределение.

3. *Нормальное* (гауссовское) распределение $N(a, \sigma^2)$ с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$. Плотность следующая:²³

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Это очень важное и распространённое (как в теоретических, так и практических исследованиях) распределение, но о содержательном смысле его мы поговорим потом — здесь все не так просто.

Иногда для нормального распределения использую обозначение $N(a, \sigma)$. У нас второй параметр — σ^2 , а не σ . Поэтому распределение $N(0, 4)$ имеет плотность

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/8}, \quad \text{а не } p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-x^2/32}.$$

Распределение $N(0, 1)$ носит название *стандартного нормального*.

3 Функция распределения

Существует ещё одна функция, полностью определяющая распределение.

Определение 3.1. Пусть ξ — случайная величина. Функция $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$F_{\xi}(x) = \mathbb{P}(\xi < x) = \mathbb{P}(\xi \in (-\infty, x)) = \mathcal{P}_{\xi}((-\infty, x)) \quad (3.1)$$

называется *функцией распределения* случайной величины ξ .

Очевидно, функция распределения однозначно определяется распределением. Верно и обратное.

Предложение 3.1. Пусть ξ — некоторая случайная величина, \mathcal{P}_{ξ} — её распределение и F_{ξ} — функция распределения. Тогда \mathcal{P}_{ξ} однозначно определяется по F_{ξ} .

²² Другое название — *экспоненциальное*.

²³ Конечно, здесь σ — это положительный квадратный корень из σ^2 .

Таким образом, если мы знаем функцию распределения, то мы знаем все распределение.²⁴

Замечание 3.1. В некоторых книгах (например, А.Н. Ширяев, Вероятность, разные издания) функция распределения определяется равенством, аналогичным (3.1), но в правой части стоит $\mathbb{P}(\xi \leq x)$. Это вопрос договоренности, привычки и удобства. У нас всегда используется знак «меньше».

Важно отметить, что функция распределения определяет распределение для любого типа распределений.

Свойства функции распределения.

1. Общие свойства.

- $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$.²⁵
- $F_\xi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $F_\xi(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$.²⁶
- F_ξ монотонно неубывает²⁷ и непрерывна слева.²⁸

Поэтому, если $F_\xi(x_0) = 0$, то $F_\xi(x) = 0$ при любом $x < x_0$. Аналогично, если $F_\xi(x_0) = 1$, то $F_\xi(x) = 1$ при любом $x > x_0$.

- $\mathbb{P}(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$ и $\mathbb{P}(\xi > a) = 1 - F_\xi(a)$.

Отсюда следует, что если случайная величина не принимает значений на отрезке $[a, b)$, то функция распределения постоянна на этом отрезке. Верно и обратное.

- Поскольку функция распределения ограничена, она может иметь разрывы только первого рода. Так как она непрерывна слева, то величины таких разрывов («скачки») имеют вид $F_\xi(x+0) - F_\xi(x)$. Скачки функции распределения имеют вероятностный смысл: для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(\xi = x) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x).$$

Таким образом,

- а) для того, чтобы $\mathbb{P}(\xi = x) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы функция распределения F_ξ была непрерывна в точке x ;
- б) если функция распределения F_ξ имеет скачок в точке x , то величина этого скачка равна $\mathbb{P}(\xi = x)$, то есть ξ принимает значение x с положительной вероятностью.

Замечание 3.2. Можно доказать, что любая монотонно неубывающая непрерывная слева функция F , обладающая пределами $F(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $F(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$, является функцией распределения некоторого распределения \mathcal{P} в том смысле, что $\mathcal{P}((-\infty, x)) = F(x)$. Поэтому (снова см. Предложение 1.2 и Замечание 1.1) мы можем говорить о любой функции, обладающей перечисленными свойствами, как о некоторой функции распределения.

Далее — более специфические свойства функций распределения.

²⁴Снова см. Предложение 1.2 и Замечание 1.1.

²⁵Очевидно, так как $F_\xi(x)$ — вероятность некоторого события.

²⁶Это следует из непрерывности меры снизу и сверху.

²⁷так как при $x < y$ имеет место включение $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < y\}$.

²⁸Снова по той же непрерывности меры сверху. Заметим, что если определять ф. р. с помощью знака \leq , то функция распределения будет непрерывна справа.

2. Функция распределения дискретных случайных величин.

Пусть распределение дискретной случайной величины задано конечной²⁹ таблицей

$$\mathcal{P}_\xi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

причем $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Обозначим $s_i = p_1 + \dots + p_i$. Тогда

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1, \\ s_i & \text{при } x_i < x \leq x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 1 & \text{при } x > x_n. \end{cases}$$

3. Функция распределения а. н. случайных величин.

- Функция распределения выражается через плотность следующим образом:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt.$$

Отсюда сразу же следует, что для а. н. распределений функция распределения является непрерывной.

- Если существует такая функция φ , что для любого x

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt,$$

то φ является плотностью распределения случайной величины ξ .³⁰

- Так как $\mathbb{P}(\xi = a) = \mathbb{P}(\xi = b) = 0$, то

$$\mathbb{P}(a \leq \xi \leq b) = \mathbb{P}(a \leq \xi < b) = \mathbb{P}(a < \xi \leq b) = \mathbb{P}(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

- Если ξ абсолютно непрерывна с плотностью p_ξ , то при почти всех по мере Лебега $x \in \mathbb{R}$ $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$.

Предупреждение: можно доказать, что любая функция распределения F при почти всех x имеет производную. Иначе говоря, равенство $F'_\xi(x) = f(x)$ для какой-то функции f и почти всех x выполняется для любой функции распределения (то есть не обязательно только для абсолютно непрерывных распределений).

Если при этом

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1,$$

то у распределения с функцией распределения F есть плотность, равная f . Если интеграл в левой части последнего неравенства не равен единице,³¹ то распределение не является абсолютно непрерывным.

²⁹С бесконечными распределениями ситуация может быть более хитрой: ничего не мешает случайной величине принимать, например, все рациональные значения. У нас такой экзотики, конечно, не будет.

³⁰Мы уже обсуждали это свойство, когда говорили об абсолютно непрерывных распределениях.

³¹На самом деле он всегда не превосходит 1.

4 Как искать распределения

4.1 Общие соображения

Стандартная задача, которой мы будем заниматься, может быть сформулирована следующим образом.

Пусть случайная величина ξ обладает плотностью распределения p_ξ и φ — некоторая измеримая функция. Найти распределение случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$.

Общий (неконструктивный) ход решения следующий. Пусть $B \in \mathcal{B}$. Тогда

$$\mathbb{P}(\eta \in B) = \mathbb{P}(\varphi(\xi) \in B) = \mathbb{P}(\xi \in \varphi^{-1}(B)) = \int_{\varphi^{-1}(B)} p_\xi(z) dz = \int_{t: \varphi(t) \in B} p_\xi(z) dz. \quad (4.1)$$

Конечно, надеяться на вычисление правой части (4.1) для любого борелевского множества B глупо. Более разумно поступать следующим образом.

Если случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ дискретна (то есть, если она принимает конечное или счетное число значений y_i), то, взяв в (4.1) в качестве B одноточечное множество $\{y_i\}$, получим, что

$$\mathbb{P}(\eta = y_i) = \int_{t: \varphi(t) = y_i} p_\xi(z) dz. \quad (4.2)$$

Вычисляя такие интегралы, получим таблицу распределения случайной величины η .

Аналогично, для нахождения функции распределения F_η случайной величины η имеем

$$F_\eta(x) = \int_{t: \varphi(t) < x} p_\xi(z) dz, \quad (4.3)$$

то есть задача сводится к вычислению однократного интеграла, зависящего от параметра x .³²

Конечно, формула (4.3) — это универсальное решение задачи о нахождении распределения случайной величины η . Однако, если у η есть плотность распределения p_η , то естественным ответом будет именно эта плотность. При этом возникает вопрос: если случайная величина ξ обладает плотностью распределения p_ξ , то для каких функций φ случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ тоже будет абсолютно непрерывной?

Для решения задач нам хватит следующего достаточного условия, накладываемого на функцию φ .

Предложение 4.1. *Пусть случайная величина ξ обладает плотностью p_ξ . Предположим, что существуют такие числа $-\infty < a_1 < \dots < a_n < \infty$, что на любом промежутке (a_i, a_{i+1}) , включая бесконечные промежутки $(-\infty, a_1)$ и (a_n, ∞) , функция φ обратима и непрерывно дифференцируема. Тогда случайная величина $\eta = \varphi(\xi)$ является абсолютно непрерывной.*

Грубо говоря, условие Предложения 4.1 говорит, что функция φ должна быть кусочно гладкой и не должна иметь ступенек.³³ В этих условиях нахождение плотности случайной величины η может быть осуществлено вычислением $F_\eta(x)$ с последующим дифференцированием. Можно также попытаться непосредственно продифференцировать правую часть (4.3), используя аналоги формулы Барроу.

Приведем простейший пример.

³²Конечно, формула (4.3) годится и для дискретной случайной величины η . Однако при решении задач (4.2) для этого случая гораздо предпочтительней. Во-первых, для дискретных случайных величин таблица распределения — гораздо более наглядный объект, определяющий само распределение, чем функция распределения — в таблице прямо указано, какие значения и с какими вероятностями принимает случайная величина η . Во-вторых, поскольку интегралы (4.3) должны быть сосчитаны при всех x , это может быть источником никому не нужных ошибок.

³³Если $\varphi(x) = c$ при $a < x < b$, то $\mathbb{P}(\eta = c) \geq \mathbb{P}(a < \xi < b)$, а последняя вероятность будет положительна, если только p_ξ не является почти всюду тождественным нулем на (a, b) .

Пример 4.1. Случайная величина ξ имеет плотность $p_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = a\xi + b$, $a > 0$.

Решение. Найдем сначала функцию распределения случайной величины ξ . Это легко:

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta < x) = \mathbb{P}(a\xi + b < x) = \mathbb{P}(\xi < (x - b)/a) = F_\xi((x - b)/a).$$

В терминах функций распределения задача решена: неизвестную функцию распределения F_η выразили через известную F_ξ , при этом существование плотности p_ξ нам не потребовалось. Но, согласно Предложению 4.1, у случайной величины η есть плотность распределения. Поэтому

$$p_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\xi\left(\frac{x - b}{a}\right) = \frac{1}{a} p_\xi\left(\frac{x - b}{a}\right).$$

А можно и не пользоваться Предложением 4.1. Действительно, сделав замену переменных $t = (s - b)/a$, получим, что

$$F_\eta(x) = F_\xi((x - b)/a) = \int_{-\infty}^{(x-b)/a} p_\xi(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^x p_\xi((s - b)/a) ds.$$

Следовательно (см. свойства плотности) функция $p_\eta(s) = a^{-1} p_\xi((s - b)/a)$ является плотностью распределения случайной величины η .

Конечно, эта задача оказалась столь простой только потому, что линейная функция $\phi(x) = ax + b$ является обратимой и обратная к ней является очень простой. Если это не так, то все вычисления оказываются более сложными.

4.2 Некоторые приемы

Перечислим некоторые приемы, облегчающие задачу нахождения распределения случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ в случае, когда ξ имеет плотность распределения p_ξ . Еще раз отметим, что слова «найти распределение случайной величины η » означают для нас, что ответ выдается в виде таблицы распределения, если η дискретна, в виде плотности распределения p_η , если η абсолютно непрерывна (это желательно), и в общем случае — в виде функции распределения F_η .

1. Если случайная величина η принимает конечное или счетное число значений t_i , то нужно решать уравнения $\varphi() = t_i$ и, получив ответ в виде некоторых подмножеств $D_i \subset \mathbb{R}$, вычислить вероятности

$$p_i = \mathbb{P}(\xi \in D_i) = \int_{D_i} p_\xi(z) dz.$$

2. В остальных случаях считается функция распределения. Для этого нужно решить при всех x неравенство $\varphi(z) < x$, получить ответ в виде подмножеств $B_x \subset \mathbb{R}$ и проинтегрировать плотность p_η по этим множествам:³⁴

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(B_x) = \int_{B_x} p_\xi(z) dz.$$

Здесь могут помочь следующие соображения.

- Полезно определить сначала, какие значения принимает случайная величина η . Если, например, $a < \eta < b$, то автоматически $F_\eta(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F_\eta(x) = 1$ при $x > b$. Значит, решать неравенства $\varphi(z) < x$ при таких x не нужно.

³⁴В принципе, такие интегралы могут и не считаться в явном виде.

- Решение неравенств $\varphi(z) < x$ можно контролировать графически: если найти решения уравнения $\varphi(z) = x$, то, используя график функции φ , несложно понять структуру множества B_x .
- После того, как функция распределения вычислена, следует проверить результат на правдоподобность. А именно, нужно проверить, удовлетворяет ли Ваш ответ основным свойствам функции распределения:
 - a) лежат ли значения F_η между нулем и единицей?
 - b) какие значения F_η принимает (в пределе) на $\pm\infty$?
 - c) является ли F_η монотонно неубывающей?
 - d) должны ли у этой функции быть скачки? Если «да», то правильно ли сосчитаны их значения и там ли они находятся, где нужно? Нет ли у Вашей функции распределения лишних скачков? Является ли Ваша функция распределения непрерывной именно слева в точках этих скачков?
 - e) там, где случайная величина η не принимает значений, ее функция распределения должна быть постоянной. Выполнено ли у Вас это свойство?

Такая проверка на правдоподобность почти гарантирует правильность ответа.

- Наконец, когда функция распределения найдена, нужно найти плотность распределения, если, конечно, она существует.