Три задачи, связанные со случайным поиском

Стоюнина Татьяна Юрьевна, гр. 522

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., д. Некруткин В.В.
Рецензент: к.ф.-м.н., д. Голяндина Н.Э.

Санкт-Петербург
2006г.

Содержание работы

Дипломная работа состоит из трех частей:

- Оценка трудоемкости случайного поиска экстремума со случайной начальной точкой.
- Аналитическое решение вспомогательной оптимизационной задачи.
- Моделирование равномерного распределения в d-мерном шаре.

Содержание работы

Дипломная работа состоит из трех частей:

- Оценка трудоемкости случайного поиска экстремума со случайной начальной точкой.
- Аналитическое решение вспомогательной оптимизационной задачи.
- Моделирование равномерного распределения в d-мерном шаре.

Дипломная работа состоит из трех частей:

- Оценка трудоемкости случайного поиска экстремума со случайной начальной точкой.
- Аналитическое решение вспомогательной оптимизационной задачи.
- Моделирование равномерного распределения в d-мерном шаре.

- Пространство оптимизации : тор $\mathbb{I}^d = (0,1]^d$ с равномерной метрикой ρ_d.
- Целевая функция $f : \mathbb{I}^d \mapsto \mathbb{R}$ ограничена, измерима и
  1. принимает максимальное значение в единственной точке x_0,
  2. непрерывна в точке x_0,
  3. неравенство $\sup\{f(x) : x \in S_r^c(x_0)\} < f(x_0)$ верно для любого $r > 0$.
- Случайный поиск :

  Алгоритм

  Шаг 1. $\xi_0 \leftarrow x$; $i \leftarrow 1$.
  Шаг 2. $\eta \leftarrow P(\xi_{i-1}, \cdot)$.
  Шаг 3. Если $f(\eta) \geq f(\xi_{i-1})$, то $\xi_i \leftarrow \eta$, иначе $\xi_i \leftarrow \xi_{i-1}$.
  Шаг 4. Если $i < n$, то $\big(i \leftarrow i+1$ и перейти к шагу 2$\big)$, иначе — STOP.

- Вероятность $P(\mathbf{x}, \cdot)$ обладает симметричной плотностью

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\rho_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

где g монотонно убывает.

- Пространство оптимизации : тор $\mathbb{I}^d = (0,1]^d$ с равномерной метрикой ρ_d.
- Целевая функция $f : \mathbb{I}^d \mapsto \mathbb{R}$ ограничена, измерима и
  1. принимает максимальное значение в единственной точке x_0,
  2. непрерывна в точке x_0,
  3. неравенство $\sup\{f(x) : x \in S_r^c(x_0)\} < f(x_0)$ верно для любого $r > 0$.
- Случайный поиск :

Алгоритм

Шаг 1. $\xi_0 \leftarrow x$; $i \leftarrow 1$.
Шаг 2. $\eta \leftarrow P(\xi_{i-1}, \cdot\,)$.
Шаг 3. Если $f(\eta) \geq f(\xi_{i-1})$, то $\xi_i \leftarrow \eta$, иначе $\xi_i \leftarrow \xi_{i-1}$.
Шаг 4. Если $i < n$, то $\big(i \leftarrow i+1$ и перейти к шагу 2$\big)$, иначе — STOP.

- Вероятность $P(\mathbf{x}, \cdot\,)$ обладает симметричной плотностью

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\rho_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

где g монотонно убывает.

Поиск: основные определения и обозначения

- Пространство оптимизации: тор $\mathbb{I}^d = (0,1]^d$ с равномерной метрикой ρ_d.
- Целевая функция $f : \mathbb{I}^d \mapsto \mathbb{R}$ ограничена, измерима и
  1. принимает максимальное значение в единственной точке x_0,
  2. непрерывна в точке x_0,
  3. неравенство $\sup\{f(x) : x \in S_r^c(x_0)\} < f(x_0)$ верно для любого $r > 0$.
- Случайный поиск:

Алгоритм

Шаг 1. $\xi_0 \leftarrow x$; $i \leftarrow 1$.
Шаг 2. $\eta \leftarrow P(\xi_{i-1}, \cdot\,)$.
Шаг 3. Если $f(\eta) \geq f(\xi_{i-1})$, то $\xi_i \leftarrow \eta$, иначе $\xi_i \leftarrow \xi_{i-1}$.
Шаг 4. Если $i < n$, то $\big(i \leftarrow i+1$ и перейти к шагу 2$\big)$, иначе — STOP.

- Вероятность $P(\mathbf{x}, \cdot\,)$ обладает симметричной плотностью

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\rho_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

где g монотонно убывает.

- Пространство оптимизации : тор $\mathbb{I}^d = (0,1]^d$ с равномерной метрикой ρ_d.
- Целевая функция $f : \mathbb{I}^d \mapsto \mathbb{R}$ ограничена, измерима и
  1. принимает максимальное значение в единственной точке x_0,
  2. непрерывна в точке x_0,
  3. неравенство $\sup\{f(x) : x \in S_r^c(x_0)\} < f(x_0)$ верно для любого $r > 0$.
- Случайный поиск :

Алгоритм

Шаг 1. $\xi_0 \leftarrow x$; $i \leftarrow 1$.
Шаг 2. $\eta \leftarrow P(\xi_{i-1}, \cdot)$.
Шаг 3. Если $f(\eta) \geq f(\xi_{i-1})$, то $\xi_i \leftarrow \eta$, иначе $\xi_i \leftarrow \xi_{i-1}$.
Шаг 4. Если $i < n$, то $\big(i \leftarrow i+1$ и перейти к шагу 2$\big)$, иначе — STOP.

- Вероятность $P(\mathbf{x}, \cdot)$ обладает симметричной плотностью

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\rho_d(\mathbf{x}, \mathbf{y})),$$

где g монотонно убывает.

Цель поиска : — попадание в множество

$$M_\varepsilon = \{x \in S_\varepsilon(x_0) : f(x) > f(y) \text{ для } y \in S^c_\varepsilon(x_0)\},$$

где $S_\varepsilon(x_0)$ — шар радиуса ε с центром в x_0.
Характеристика качества функции — коэффициент асимметрии:

$$F^f(r) = mes_d(M_r)/mes_d(S_r(x_0)).$$

Невырожденная функция: $F^f(r) \geq \theta > 0$.
Трудоемкость поиска: $\mathsf{E}_x\tau_\varepsilon$, где $\tau_\varepsilon = \min\{i \geq 0 : \xi_i \in M_\varepsilon\}$. x — начальная точка поиска.
Общая проблема : оценить/уменьшить трудоемкость поиска.

Результаты А.С. Тихомирова.

- Имеют место неравенства

$$C|\ln\varepsilon| \le \mathsf{E}_x\tau_\varepsilon \le I(\delta(x),\varepsilon;f,g). \qquad (1)$$

- Существует g_{opt}, доставляющая минимум правой части (1).
- Для невырожденных целевых функций существуют такие g, что

$$\mathsf{E}_x\tau_\varepsilon \le C(f,d)\ln^2(\varepsilon).$$

- Если $F^f \equiv \theta$, то g_{opt} и $I(\delta(x),\varepsilon;f,g_{opt})$ находятся явно, причем g_{opt} не зависит от θ.

Проблемы :

- g_{opt} зависит от x, то есть от взаимного расположения начальной точки поиска и точки экстремума. А оно на практике неизвестно.
- Результаты, относящиеся к классам функций вида $\{f:\ F^f(r) \ge \theta > 0\}$.

Основные результаты.
Пусть начальная точка поиска ξ равномерно распределена в $\mathbb{I}^d$. Тогда

- $\mathrm{E}\tau_\varepsilon \leq J(\varepsilon; f, g)$, где $J(\varepsilon; f, g)$ явно представлено в интегральной форме.
- Если $F^f(r) \geq \theta > 0$, то при $\varepsilon < 0.25$

$$J(\varepsilon; f, g) \leq J_\theta(\varepsilon; g) = \frac{1}{\phi}\left(d\int\limits_{2\varepsilon}^{0.5} \frac{1}{z^{d+1}g(z)}\,\mathrm{d}z + \frac{2^d - \phi}{g(0.5)} \right). \qquad (2)$$

- Правая часть неравенства (2) достигает своего минимума при

$$g(r) = g_{\mathrm{opt}}(r) = \left(d\ln(\beta/\alpha\varepsilon) - (2\beta)^{-d} \right)^{-1} \begin{cases} (\alpha\varepsilon)^{-d}, & \text{при } 0 < r \leqslant \alpha\varepsilon, \\ r^{-d}, & \text{при } a\varepsilon < r \leqslant \beta, \\ \beta^{-d}, & \text{при } \beta < r \leqslant 0.5, \end{cases} \qquad (3)$$

  если $\varepsilon < a(d, \theta)$. Иначе $g_{opt} \equiv 1$.

Замечание. Величина $J_\theta(\varepsilon; g_{opt})$ и постоянные a, α и β выписываются явно.

Постановка задачи : ставится задача минимизации функционала

$$\mathcal{J}_{u,v}(w) = \int\limits_u^v \frac{h^2(r)}{w(r)} + \frac{c}{w(1)},$$

(где $0 < u < v \leq 1$, $c > 0$ и $h \in \mathbb{L}^2(u,v)$ — неотрицательная функция) в классе невозрастающих строго положительных непрерывных слева плотностей w.

Мотивация : см. формулу (2).

База : А.С. Тихомиров для случая $v = 1$.

Результаты А.С. Тихомирова (краткая сводка):

- Теорема существования w_{opt}.
- Анализ структуры w_{opt}.
- Явный вид w_{opt} в случае $v = 1$, когда функция h гладкая и строго убывает (2 параметра).

Полученные результаты для случая произвольной h и $v \leq 1$:

- Теорема существования w_{opt}.
- Анализ структуры w_{opt}.
- Вид w_{opt} в случае, когда функция h является непрерывной и строго убывает (3 параметра).

Общий вид :

$$w_{\text{opt}}(r) = w_{b,d,\theta}(r) = \frac{1}{\lambda_{b,d,\theta}} \begin{cases} h(b), & \text{при } r \in (0,b], \\ h(r), & \text{при } r \in (b,d], \\ h(d), & \text{при } r \in (d,v], \\ \theta, & \text{при } r \in (v,1] \end{cases}$$

с $u < b \leq d \leq v$, $\theta \leq h(d)$.

Техника: А.С.Тихомиров.

Задача : моделирование р. р. в единичном d-мерном шаре
База : алгоритм (и реализация) Л.А.Евдокимова и И.В.Романовского.
Идея :

- Шар большого радиуса R (R^2 — целое).
- Покрытие шара единичными кубами (целочисленные вершины)

$$c_d(t) = \{x | t_j \le x_j < t_j + 1, , j = 1, \dots, d\}.$$

- Параметризация кубов с помощью векторов $t = (t_1, \dots, t_d)$.
- Моделирование номера i куба.
- Сопоставление номера i кубу $t^{(i)}$ (метод Уолкера — d раз).
- Моделирование р. р. в кубе $t^{(i)}$ и проверка принадлежности шару. Если "да", то деление полученного вектора на R.

Параметры алгоритма: d, R^2.

Ограничения : число кубов $\leq 2^{31} - 1$ (тип long).
Объем памяти : необходимый объем памяти $\sim 8dR^3$ байт.
Результат: трудоемкость отбора при разных ограничениях на память.

d	C_{min}	10 Mb	5 Mb	1 Mb
2	≈1	1.01	1.01	1.03
3	≈1	1.03	1.03	1.06
5	1.05	1.07	1.09	1.17
7	1.25	1.25	1.25	1.33
10	2.31	2.31	2.31	2.31
20	229	229	229	229

Проблема : При ограничении на трудоемкость отбора < 2 получаем ограничение < 10 на размерность d.

Модификации :

- Хранение целых в виде частного и остатка при делении на $2^{32}-1$ (структура superlong).
  Ограничение: число кубов $< 2^{32}(2^{32}-1)-1$.
- Оптимизация хранения массивов (выигрыш $\sim 13R^3$ байт).
- Частичное использование типа long (выигрыш $\asymp dR^3$ байт).

Результат: трудоемкость отбора резко падает при больших d.

	10 Mb		5 Mb		1 Mb	
d	C_{long}	C_{slong}	C_{long}	C_{slong}	C_{long}	C_{slong}
2	1.01	≈ 1	1.01	≈ 1	1.03	≈ 1
3	1.03	1.02	1.03	1.02	1.06	1.04
5	1.07	1.06	1.09	1.08	1.17	1.14
7	1.25	1.13	1.25	1.17	1.25	1.29
10	2.31	1.29	2.31	1.37	2.31	1.69
20	229	5.27	229	5.27	229	7.34

Тестирование.

Статистика критерия:

Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ р.р. в единичном d-мерном шаре $B_d(1)$. Тогда

$$\left(\frac{\xi_{i+1}^2 + \ldots + \xi_d^2}{1 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_i^2}\right)^{d-i}$$

р.р. на $(0, 1)$ для любого $0 \leq i < d$.

Критерии: Колмогорова и χ^2 с 20 интервалами. $N = 1000$.

Программа :

- Реализация алгоритма с модификациями для размерности $d \leq 20$.
- Выбор параметров алгоритма согласно заданному ограничению по памяти
- Тестирование сгенерированной выборки