Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Голяндина Нина Эдуардовна

Исследование вероятностных методов решения интегральных и дифференциальных уравнений

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
1998

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент **В. В. Некруткин**.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **В. А. Егоров**; кандидат физико-математических наук, доцент **О. В. Русаков**.

Ведущая организация — Институт проблем машиноведения РАН.

Защита состоится 24 декабря 1998 г. в _____ час. на заседании диссертационного совета К 063.57.29 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук в Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198904, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Библиотечная пл., д. 2.

С диссертацией можно познакомиться в Научной библиотеке им. М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199164, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан "__"_________ 1998 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук О. И. Рейнов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Метод Монте-Карло является одним из основных методов решения многих уравнений математической физики, в том числе кинетических уравнений динамики разреженных газов и краевых задач. При изучении стохастических процедур решения таких уравнений возникают теоретические задачи, связанные с исследованием статистических свойств оценок и трудоемкости их моделирования. Актуальность таких задач объясняется как необходимостью их строгого обоснования, так и важностью исследования скорости сходимости и сложности соответствующих алгоритмов.

Диссертационная работа посвящена применению метода Монте-Карло к решению интегральных и дифференциальных уравнений. В первых двух главах рассматривается вероятностное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений баланса в пространстве мер, в частности, уравнений больцмановского типа. Здесь основное внимание уделяется качеству аппроксимации, то есть смещению и дисперсии оценок изучаемого функционала. В третьей главе строятся новые оценки решения внутренней и внешней задачи Дирихле для уравнений математической физики, связанных с оператором Лапласа. В этой задаче акцент ставится на уменьшении вычислительных затрат, что достигается путем выбора соответствующей марковской цепи, быстро сходящейся к границе области.

Цель работы. Целью работы является

1. построение состоятельных оценок функционалов от решений однородных дифференциальных уравнений баланса в пространстве мер и исследование статистических характеристик этих оценок; теоретическое сравнение качества известных алгоритмов метода Монте-Карло для решения однородных уравнений больцмановского типа;

2. получение результатов о скорости сходимости марковских цепей к притягивающему подмножеству фазового пространства и применение этих результатов к построению быстрых стохастических алгоритмов решения некоторых задач математической физики.

Научная новизна. В работе представлены следующие новые результаты.

1. Для уравнений баланса общего вида выделен класс реализуемых мерозначных марковских процессов $\xi_n(\,\cdot\,)$, решающих эти уравнения в смысле слабой сходимости распределений процессов к мере Дирака, сосредоточенной на решении $\mu_\cdot$ уравнения.

2. Для гладких функционалов ψ получено явное выражение главных членов погрешностей оценивания величин $\psi(\mu_t)$ с помощью оценок $\psi(\xi_n(t))$. В этой связи изучены различные варианты начальных распределений $\mathcal{L}(\xi_n(0))$.

3. Для уравнений больцмановского типа произведено теоретическое сравнение основных алгоритмов его решения, в том числе (на модельном примере) при больших временах.

4. Построены новые стохастические оценки решения ряда краевых задач математической физики с использованием марковских цепей, быстро сходящихся к границе области.

Общая методика исследования. В работе использовалась теория марковских процессов и семейств, теория однопараметрических полугрупп сжимающих операторов, теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, теория слабой сходимости распределений, а также теория уравнений математической физики.

Практическая ценность. Полученные теоретические результаты диссертации могут быть использованы при построении и анализе алгоритмов метода Монте-Карло для решения ряда задач математической физики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены и докладывались на второй и третьей международных конференциях по моделированию "Mathematical methods in stochastic simulation and experimental design", St.Petersburg, 1996, 1998; на международном семинаре "Numerical methods for kinetic equations", Berlin, 1997 и на семинарах кафедры статистического моделирования математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[7].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 38 наименований. Общий объем работы составляет 133 стр.

Содержание работы

Во **введении** дается обзор литературы, обосновывается постановка задачи и кратко излагаются результаты диссертации.

Глава 1. Первая глава посвящена вопросам аппроксимации полугрупп, связанных с решениями обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве E конечных зарядов (иначе говоря, знакопеременных мер, иногда в дальнейшем для краткости называемых просто мерами) с нормой $\|\mu\| = \mathrm{Var}\,\mu$.

Первый раздел главы носит вводный характер. В нем даются необходимые определения, связанные с одновременным использованием сильной $\mathcal{F}_s$ (сходимость по вариации) и слабой $\mathcal{F}_w$ (слабая сходимость) топологий в пространстве конечных зарядов E, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств полного метрического компактного сепарабельного пространства D. Кроме того, вводятся общие условия на решение μ_t однородного дифференциального уравнения $d\mu_t/dt = G(\mu_t)$, где $G : V \mapsto E$, а V — непустой слабый компакт, сильное замыкание сильной внутренности которого содержит V, а также выписывается явный вид инфинитезимального оператора полугруппы T^t сжимающих операторов, порожденных дифференциальным уравнением, на множестве $\mathbf{C}^1(V)$ слабо-непрерывных дифференцируемых функций со слабо-непрерывными производными.

Раздел 2 посвящен ошибкам аппроксимации полугруппы T^t с помощью полугрупп T_n^t, порожденных однородными мерозначными марковскими семействами с фазовыми пространствами $V_n \subset V$, аппроксимирующими V. Сначала (теоремы 2.1 и 2.2 подраздела 2.1) доказываются общие достаточные условия аппроксимации. При доказательстве используется вариант теоремы Троттера-Като теории линейных сжимающих полугрупп.

В подразделе 2.2 уточняются условия теоремы 2.2 при рассмотрении скачкообразных марковских семейств, даются конструктивные достаточные условия сходимости полугрупп T_n^t к T^t (теорема 2.3), для функций класса $\mathbf{C}^2(V)$ находится вид остаточного члена аппроксимации, пригодный для дальнейшего исследования (теорема 2.4).

Интересующие нас дифференциальные уравнения баланса заданы на множестве H вероятностных мер в $(D, \mathcal{B})$, сильная внутренность которого пуста и поэтому к ним результаты раздела 2 непосредственно не применимы. Поэтому в разделе 3 первой главы эти результаты переносятся на уравнения, заданные в H.

Прежде всего, в H можно определить операцию дифференцирования, аналогичную обычному дифференцированию в E. Соответствующие производные при этом называются H-производными и в их обозначения добавляется нижний индекс H.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение баланса

$$\frac{d\mu_t}{dt} = G(\mu_t), \tag{1}$$

где $G : H \mapsto E$ и $G(\mu)(D) = 0$ для любого $\mu \in H$ (условие баланса). Обозначим $\mu_t = \mu_t(\mu)$ решение уравнения (1) с начальными данными μ и положим $T^t\psi(\mu) = \psi(\mu_t(\mu))$. Пусть $Z = \{\nu \in E : \nu(D) = 0\}$ и $\mathbf{C}^k(H)$ — пространство слабо-непрерывных k раз дифференцируемых функций со слабо-непрерывными H-производными.

Ход рассуждений в третьем разделе главы 1 может быть описан следующим образом. На правую часть уравнения (1) накладываются необходимые условия (возможно, не все используемые одновременно).

Условия на правую часть уравнения баланса:

$A0_H$. существует такое положительное число ε_0, что для любого $\mu \in H$ мера $\mu + \varepsilon_0 G(\mu)$ является неотрицательной;

$A1_H$. отображение $G : H \mapsto E$ является сильно-непрерывным, H-дифференцируемым, причем производная G'_H также сильно-непрерывна;

$A2_H$. $\sup\limits_{(\nu,\mu)} \|G'_H(\mu)(\nu)\| < +\infty$, где супремум берется по парам (ν, μ) таким, что $\nu \in Z$, $\|\nu\| \leq 1$ и $\mu \in H$;

$A3_H$. отображения $G : H \mapsto E$ и G'_H являются слабо-непрерывными;

$A4_H$. отображение G дважды H-дифференцируемо, причем производное отображение G''_H является сильно-непрерывным и

$$\sup_{(\nu_1,\nu_2,\mu)} \|G''_H(\mu)(\nu_1,\nu_2)\| < +\infty,$$

где супремум берется по наборам (ν_1,ν_2,μ) таким, что $\mu \in H$, $\nu_1,\nu_2 \in Z$ и $\max(\|\nu_1\|,\|\nu_2\|) \le 1$;

$A5_H$. отображение G''_H слабо-непрерывно.

Заметим, что из условия $A0_H$ следует, что правую часть уравнения можно представить в виде $G(\mu) = cB(\mu) - c\mu$, где $c = 1/\varepsilon_0$, причем для любого $\mu \in H$ мера $B(\mu)$ также является вероятностной. В дальнейшем будем считать, что $c = 1$.

Далее, рассматриваются множества $H_n \subset H$, аппроксимирующие H и скачкообразные мерозначные семейства Ξ_n с фазовыми пространствами H_n, полугруппами T_n^t и слабо-непрерывными инфинитезимальными характеристиками $\lambda_n(\nu)$ и $\pi_n(\nu,\,\cdot)$, $\nu \in H_n$.

Любая функция g, заданная на H, может быть продолжена по однородности на множество $V = H^C \supset H$, являющееся замкнутым шаровым слоем положительных мер. Тем самым появляется возможность продолжить уравнение (1) с H на H^C и аналогичным способом произвести продолжение скачкообразных семейств. Оказывается (леммы 3.3–3.6 и теоремы 3.1, 3.2), условия $A0_H$–$A5_H$ обеспечивают все необходимые свойства продолженных уравнений (существование и единственность решения, дифференцируемость решений по начальным данным и т.п.), а также выполнения условий теорем аппроксимации 2.1–2.4 раздела 2 первой главы. Более того, эти результаты переносятся практически без изменения обратно в H.

Сформулируем основной результат третьего раздела первой главы, соответствующий второму пункту теоремы 3.4.

Обозначим $\mathfrak{p}_n$ — оператор сужения функций с H на H_n, $\theta_\mu^{(n)}$ — мерозначную случайную величину, имеющую смысл величины скачка, согласованного с инфинитезимальной характеристикой $\pi_n(\mu,\,\cdot)$, и $\mathbf{f}(\nu) = \int f d\nu$. Для случайной меры $\xi \in E$ выражение $\mathcal{E}(\xi)$ будет обозначать заряд ν такой, что $\mathbf{f}(\nu) = \mathbf{E}\int f d\xi$ при $f \in \mathbf{C}(D)$.

Теорема 1.3.4. 2. *Если для любой функции* $f \in \mathbf{C}(D)$

$$\sup_{\mu\in H_n} \left|\mathbf{Ef}\left(\lambda_n(\mu)\theta_\mu^{(n)} - G(\mu)\right)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и

$$\beta_n = \sup_{\mu\in H_n} \lambda_n(\mu)\mathbf{E}\|\theta_\mu^{(n)}\|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то при $t \ge 0$ *и* $\psi \in \mathbf{C}(H)$ *имеет место сходимость*

$$\sup_{\mu\in H_n} |T_n^t \mathfrak{p}_n \psi(\mu) - T^t\psi(\mu)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

причем при $\psi \in \mathbf{C}^2(H)$ *равномерно по* $\mu \in H_n$

$$T_n^t \mathfrak{p}_n \psi(\mu) - T^t \psi(\mu) = \int_0^t T_n^{t-\tau} \mathfrak{p}_n \Big(\partial_H^1 T^\tau \psi \left(\mu; \lambda_n(\mu) \mathcal{E}(\theta_\mu^{(n)}) - G(\mu)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda_n(\mu) \mathbf{E} \partial_H^2 T^\tau \psi \left(\mu; \theta_\mu^{(n)}, \theta_\mu^{(n)}\right) \Big) d\tau + o(\beta_n). \qquad (2)$$

В разделе 4 рассматриваются эмпирические скачкообразные семейства, т. е. марковские скачкообразные мерозначные семейства с фазовыми пространствами $H_n = \{\sum_{i=1}^n \delta_{v_i}/n, v_i \in D\}$. Особенность таких семейств связана с тем, что любой случайный процесс $\mathbf{v}_n(t) = (v_1^{(n)}(t) \ldots, v_n^{(n)}(t)) \in D^n$ порождает мерозначный процесс $\xi_n(t) = \sum_{i=1}^n \delta_{v_i^{(n)}(t)}/n \in H_n$, и тем самым становится возможным перейти на язык "обычных"марковских семейств с фазовым пространством D^n. В подразделе 4.1 осуществляется такой переход (лемма 4.1), а также описывается подкласс скачкообразных марковских семейств в D^n, называемых (n,k)-частичными.

Зафиксируем n и $k \le n$. Каждому набору индексов $I_k = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_j = 1, \ldots, n$, $i_j \ne i_l$ при $j \ne l$, и каждому $\mathbf{v} \in D^n$ сопоставим вероятности $p_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{v})$, а также вероятностные меры $T_{i_1 \ldots i_k}(\,\cdot\,; \mathbf{v})$ на $\mathcal{B}^k$, которые мы будем называть трансформантами.

При фиксированных k и n будем говорить, что однородное скачкообразное семейство в D^n с инфинитезимальными характеристиками $\Lambda_n^{(k)}$ и $\Pi_n^{(k)}$ (а также порождаемое им марковское семейство в H_n) является (n,k)-частичным, если

$$\Pi_n^{(k)}(\mathbf{v}, A) = \int_A \sum_{I_k} p_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{v}) T_{i_1 \ldots i_k}(dv'_{i_1} \ldots dv'_{i_k}; \mathbf{v}) \bigotimes_{j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}} \delta_{v_j}(dv'_j),$$

где $\sum_{I_k}$ означает суммирование по всевозможным наборам I_k.

Алгоритмически такой процесс может быть описан как движение n взаимодействующих частиц, причем само взаимодействие происходит следующим образом: если в момент, предшествующий столкновению, фазовая координата процесса равна $\mathbf{v}$, то с вероятностью $p_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{v})$ происходит выбор k "сталкивающихся частиц"с номерами $i_1, \ldots, i_k$, которые затем меняют свои координаты согласно трансформанте $T_{i_1 \ldots i_k}(\,\cdot\,; \mathbf{v})$.

В разделе 4 (теоремы 4.1–4.3, а также следствие 4.1 и замечания 4.1 и 4.2) получены условия, при которых (n,k)-частичные семейства "аппроксимируют"уравнение баланса, а также выписан вид ошибок аппроксимации. Приведем формулировку теоремы 4.2 с упрощающим предположением $k = 1$. Для $\mathbf{u} \in D^n$ обозначим $\nu = \nu(\mathbf{u})$ соответствующую эмпирическую меру и положим $f_2(\tau, \nu; v, u) = \partial_H^2 T^\tau \psi(\nu; \delta_v, \delta_u)$, $\quad B(\,\cdot\,; \nu) = B(\nu)$.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $\Lambda_n^{(1)} = n$, $p_i(\mathbf{u}) = 1/n$ *и* $T_i(\,\cdot\,; \mathbf{u}) = B(\nu)$. *Тогда при*

$\psi \in \mathbf{C}^2(H)$ *и* $t \geq 0$ *равномерно по* $\nu \in H_n$ *имеет место представление*

$$T_n^t \mathfrak{p}_n \psi(\nu) - T^t \psi(\nu) = \frac{1}{n} \int\limits_0^t \mathbf{E}_\nu m_1(\tau, \xi_n(t-\tau)) d\tau + o(n^{-1}),$$

$$m_1(\tau, \nu) = \frac{1}{2} \int\limits_D f_2(\tau, \nu; v, v) \Big(B(dv; \nu) + \nu(dv) \Big) -$$

$$- \int\limits_{D^2} f_2(\tau, \nu; v_1, v_2) B(dv_1; \nu) \nu(dv_2).$$

Глава 2. Во второй главе диссертации полученные результаты используются для исследования статистических оценок гладких функционалов от решения дифференциального уравнения (1).

Как обычно, если добавить к результатам о сходимости полугрупп требование слабой сходимости $\mathcal{L}(\xi_n(0)) \Rightarrow \delta_\mu$, где μ — начальные данные уравнения (1), будет иметь место сходимость $\psi(\xi_n(t)) \xrightarrow{\mathbf{P}} \psi(\mu_t)$ для любых $t \geq 0$ и $\psi \in \mathbf{C}(\mathbf{H})$ (теорема 1.1 главы 2). Более того (замечание 1.2), отсюда следует слабая сходимость распределений мерозначных процессов $\xi_n(\,\cdot\,)$ к детерминированной мерозначной функции $\delta_{\mu_\cdot(\mu)}$ в пространстве вероятностных мер на $\mathrm{D}([0, \infty))$.

Поскольку

$$\psi(\xi_n(t)) - \psi(\mu_t) = \Big(\psi(\xi_n(t)) - \psi(\mu_t(\xi_n(0))) \Big) + \Big(\psi(\mu_t(\xi_n(0))) - \psi(\mu_t(\mu)) \Big),$$

то погрешность оценивания распадается на два слагаемых, первое из которых "отвечает"за различие в переходных механизмах аппроксимирующего марковского семейства и дифференциального уравнения, а второе описывает "вклад начального распределения"$\mathcal{L}(\xi_n(0))$.

Изучению этого вклада посвящен подраздел 1.2 второй главы (теорема 1.2 и следствие 1.1). Пусть $\mu \in H$ и $\mathcal{L}(\zeta_i^{(n)}) = \mu$. Предположим, что при любом n совместное распределение случайных величин $\zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ является симметричным. Обозначим $\mathcal{L}(\zeta_i^{(n)}, \zeta_j^{(n)}) = \mathcal{P}_2^{(n)}$ при $i \neq j$, $V_n = \left\| \mathcal{P}_2^{(n)} - \mu \otimes \mu \right\|$ и положим $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^n \delta_{\zeta_i^{(n)}} / n$.

Теорема 2.1.2. 1. *Если* $F \in \mathbf{C}^3(E)$ *и* $V_n = o(1/n)$, *то*

$$m_0(F) = \mathbf{E} F(\xi_n) - F(\mu) = \frac{1}{2n} A(F) + o(1/n), \tag{3}$$

где

$$A(F) = \int\limits_D f_2(\mu; v, v) \mu(dv) - \int\limits_{D^2} f_2(\mu; v_1, v_2) \mu(dv_1) \mu(dv_2). \tag{4}$$

2. *Пусть* $F \in \mathbf{C}^5(E)$ *и*

$$\mathcal{P}_2^{(n)} = \frac{n+1}{n} \mu \otimes \mu - \frac{1}{n} \nu_n + m_n,$$

где $\nu_n \Rightarrow \mathcal{L}(\zeta_1^{(1)}, \zeta_1^{(1)})$, *а* $\|m_n\| = o(1/n)$. *Тогда* $m_0(F) = o(1/n)$.

Следующее утверждение дает конструктивные достаточные условия выполнения второго пункта предыдущей теоремы. Пусть $\mu \in H$ и при каждом $n \geq 1$ существует такое разложение $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^{(n)}/n$, что $\mu_i^{(n)} \in H$ и $\max\limits_{i \in I_n} \operatorname{diam}(D_{i,n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, где $D_{i,n} = \operatorname{support}(\mu_i^{(n)})$, $I_n \subset \mathcal{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\operatorname{card}(\mathcal{N}_n \setminus I_n)/n \to 0$ при $n \to \infty$. Предположим, что случайные величины $\widehat{\zeta}_i^{(n)}$ независимы и имеют распределение $\mu_i^{(n)}$, $\; i = 1, \ldots, n$.

Следствие 2.1.1. *Если* $F \in \mathbf{C}^5(E)$, *то для* $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{\widehat{\zeta}_i^{(n)}}/n$ *выполняется соотношение* $m_0(F) = o(1/n)$.

Сформулируем для случая $k = 2$ вариант второго пункта основной теоремы 1.3 главы 2, в которой приводятся итоговые результаты для смещения и дисперсии оценок достаточно гладких функций от решения дифференциального уравнения баланса (1) с помощью выбранного класса (n, k)-частичных скачкообразных семейств.

Пусть $B_2(\,\cdot\,; u_1, u_2; \nu)$ — распределения на $\mathcal{B}^2$, слабо непрерывные по $u_1, u_2 \in D$ и $\nu \in H$, причем

$$\int\limits_{D^2} B_2(\,\cdot\, \times D; u_1, u_2; \nu)\nu(du_1)\nu(du_2) = B(\nu)$$

и $B_2(C_1 \times C_2; u_1, u_2; \nu) = B_2(C_2 \times C_1; u_2, u_1; \nu)$. Обозначим $f_1(\tau, \nu; v) = \partial_H^1 T^\tau \psi(\nu; \delta_v)$ и

$$B_1(dv; u; \nu) = \int\limits_{D} B_2(dv \times D; u, w; \nu)\nu(dw).$$

Теорема 2.1.3. 2. *Пусть для уравнения баланса* (1) *выполнены условия* $A0_H - A5_H$, *а также аналогичные условия, связанные с трижды дифференцируемостью отображения* G, $\;\Xi_n$ — $(n, 2)$-*частичное семейство такое, что для* $\mathbf{u} \in D^n$ *и* $\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{u_i}/n$ *его характеристики имеют вид* $\Lambda_n^{(2)} = n/2$, $\;p_{ij}(\mathbf{u}) = 1/n(n-1)$ *и* $T_{ij}(\,\cdot\,; \mathbf{u}) = B_2(\,\cdot\,; u_i, u_j; \nu)$. *Предположим, что* $\xi_n(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{\zeta_i}/n$, *где случайные величины* ζ_i *независимы и имеют распределение* μ. *Тогда при* $\psi \in \mathbf{C}^3(H)$ *и* $t \geq 0$ *справедливо*

$$\mathbf{E}\Big(\psi(\xi_n(t)) - \psi(\mu_t(\mu))\Big)^2 = S_0^2(\mu) + S_2^2(\mu) + o(1/n),$$

$$S_0^2(\mu) = \frac{1}{n}\left(\int\limits_{D} f_1^2(t, \mu; v)\mu(dv) - \Big(\int\limits_{D} f_1(t, \mu; v)\mu(dv)\Big)^2\right),$$

$$S_2^2(\mu) = \frac{1}{n}\int\limits_{0}^{t} s_2^2(\tau, \mu_{t-\tau}(\mu))d\tau$$

и s_2^2 задается формулой $s_2^2(\tau,\nu) = s_1^2(\tau,\nu) + \sigma_2(\tau,\nu)$, где

$$s_1^2(\tau,\nu) = \int\limits_{D^2} B_1(dv;u;\nu)\nu(du)\Big(f_1(\tau,\nu;v) - f_1(\tau,\nu;u)\Big)^2,$$

$$\sigma_2(\tau,\nu) = \int\limits_{D^4} B_2(dv_1dv_2;u_1,u_2;\nu)\nu(du_1)\nu(du_2)\times$$

$$\times\Big(f_1(\tau,\nu;v_1) - f_1(\tau,\nu;u_1)\Big)\Big(f_1(\tau,\nu;v_2) - f_1(\tau,\nu;u_2)\Big).$$

В качестве примера применения полученных результатов в разделе 2 второй главы рассматривается решение однородного уравнения больцмановского типа, то есть уравнения (1) с правой частью

$$G(\mu) = \int\limits_{D^2} T(\,\cdot\,;u_1,u_2)\mu(du_1)\mu(du_2) - \mu \tag{5}$$

для нескольких видов эмпирических скачкообразных процессов. В их число входят известные процессы Нанбу и Берда.

Процесс Нанбу задается параметрами $k=1$, $\Lambda_n^{(1)} = n$, $p_i = 1/n$ и

$$T_i(dv;\mathbf{u}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T(du;u_i,u_j).$$

Опишем семейство процессов Берда. Пусть $\varphi(u) = \varphi(u;u_1,u_2)$ такая измеримая непрерывная функция, что для любых u_1 и u_2

$$\int\limits_{D} T(dw;u_1,u_2)\delta_{\varphi(w;u_1,u_2)}(dv) = T(dv;u_2,u_1)$$

Тогда процесс Берда определяется набором $k=2$, $\Lambda_n^{(2)} = n/2$, $p_{ij} = 1/n(n-1)$ и $T_{ij}(dv_1dv_2;\mathbf{u}) = T(dv_1;u_i,u_j)\otimes\delta_{\varphi(v_1;u_i,u_j)}(dv_2)$.

В лемме 2.1 раздела 1 доказывается, что, если трансформанта $T(\,\cdot\,;u_1,u_2)$ слабо непрерывна по (u_1,u_2), то уравнение (1) с правой частью (5) удовлетворяет условиям $A0_H$–$A5_H$ раздела 3.1 главы 1 и, тем самым, для уравнений больцмановского типа имеют место все предыдущие результаты об аппроксимации.

Обозначим $S^2_{\mathbf{B}}$ ($S^2_{\mathbf{N}}$) величину $\mathbf{E}\Big(\psi(\xi_n(t)) - \psi(\mu_t(\mu))\Big)^2$ для аппроксимирующего процесса Берда (Нанбу).

Лемма 2.2.2. *Пусть $\psi \in \mathbf{C}^2(H)$ и трансформанта $T(\,\cdot\,;u_1,u_2)$ инвариантна относительно перестановки u_1 и u_2. Тогда с точностью до $o(1/n)$ имеет место неравенство $S^2_{\mathbf{B}} \le 2S^2_{\mathbf{N}}$.*

Этот результат означает, что в практических ситуациях алгоритмы Берда всегда не хуже алгоритма Нанбу по трудоемкости.

В подразделе 2.4 (лемма 2.3) приведен пример того, как применяется техника главы 1, если число координат процесса в D^n, меняющих свое положение при скачке, является случайным (а не фиксированным, как для (n,k)-частичных процессов). Это расширяет множество алгоритмов, "решающих"уравнения больцмановского типа.

Обычное однородное уравнение Больцмана динамики разреженных газов соответствует локально компактному пространству $D = \mathbb{R}^3$, в то время как все предыдущие результаты получены для компакта. В подразделе 2.5 (теорема 2.1) показано, что для уравнений больцмановского типа эти результаты переносятся на случай пространства мер, заданных на локально-компактном пространстве D.

Последний раздел второй главы посвящен исследованию модельного примера с точки зрения поведения функции $C_{\mathbf{B}}(t) = \lim nS^2_{\mathbf{B}}$ и аналогичной функции $C_{\mathbf{N}}(t)$ при $t \to \infty$ для процессов Берда и Нанбу.

Рассмотрим уравнение (1) с правой частью (5) на отрезке $D = (0,1]$ с метрикой $\rho(u,v) = \min(|u-v|, 1-|u-v|)$ и трансформантой $T(\,\cdot\,; u_1, u_2) = \delta_{u_1 \oplus u_2}$, где знак "$\oplus$"означает сложение по модулю 1. Пусть ψ — линейный функционал, т. е. $\psi(\mu_t) = \int g d\mu_t$, $g \in \mathbf{C}(D)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть μ_∞ — равномерное распределение на $(0,1]$ и $\|\mu - \mu_\infty\| = q < 1$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} C_{\mathbf{N}}(t) = \mathbf{D}\psi(\mu_\infty), \qquad \lim_{t\to\infty} C_{\mathbf{B}}(t) = \frac{3}{2}\mathbf{D}\psi(\mu_\infty),$$

где $\mathbf{D}\psi(\mu_\infty)$ — дисперсия g по мере μ_∞.

Глава 3. Перейдем к описанию содержания третьей главы. Одним из способов решения краевых задач математической физики методом Монте-Карло является моделирование марковских цепей, сходящихся к границе области, с последующим вычислением соответствующих оценок на их траекториях. При этом важной характеристикой метода является среднее число шагов марковской цепи до попадания в ε-окрестность границы, и, следовательно, возникает задача оценки этой характеристики при малых ε.

Введем некоторые обозначения. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^m$, $\Gamma = \partial G$, $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \overline{G} : d(x) < \varepsilon\}$, $d(x) = \mathrm{dist}(x, \Gamma)$ и Ξ — однородное марковское семейство с фазовым пространством G и дискретным временем, причем $f(\varepsilon) = \sup\limits_{x\in G} \mathbf{E}_x \nu_\varepsilon < +\infty$, где $\nu_\varepsilon = \min\{n : \xi_n \in \Gamma_\varepsilon\}$.

Техника, используемая в диссертационной работе для получения верхней границы $f(\varepsilon)$, основана на решении специальных неравенств (теоремы 1.1 и 1.2 подраздела 1.1) и применяется в теореме 1.3 подраздела 1.2 для оценки скорости сходимости марковских цепей.

Опишем содержание теоремы 1.3. Рассмотрим на $(0,t]$ гладкую строго убывающую функцию θ, стремящуюся к бесконечности в нуле. Возьмем $\beta > 0$ и положим $\widetilde{\varphi}(x) = \theta^{-1}(\theta(x) - \beta)$. Пусть $n(x)$ — убывающая целочисленная функция, стремящаяся к бесконечности в нуле, и a_l — убывающая положительная суммируемая последовательность.

Теорема 3.1.3. *Если* $\mathbf{P}_x(\nu_\varepsilon > l) \leq C\, a_l$ *при* $x \in \Gamma_{\widetilde{\varphi}(\varepsilon)} \setminus \Gamma_\varepsilon$ *и* $l = 1, \ldots, n(\varepsilon)$, *а*

$$\int\limits_0^t a_{n(z)} |\theta'(z)| dz < +\infty,$$

то $f(\varepsilon) \leq C_1\theta(\varepsilon) + C_2$ *при достаточно малых* ε.

Во втором разделе главы 3 этот результат применяется к специальной марковской цепи, названной "сферическим процессом со сдвинутыми центрами".

Область G будем называть R_1-регулярной, если $\sup\limits_{x\in G} d(x) < +\infty$ и любой точки границы Γ области G можно коснуться изнутри и снаружи шаром радиуса $R_1 > 0$.

Обозначим $B_R(z) = \{y : |z - y| \leq R\}$, $B_z = B_{d(z)}(z)$, $S_z = \partial B_z$. Пусть $k \geq 1$, $z^* \in \Gamma$, причем $|z - z^*| = d(z)$, и $z' = z + (k-1)(z - z^*)$. Измеримую функцию $k : G \mapsto \mathbb{R}$, $k(z) \geq 1$, такую, что $B_{k(z)d(z)}(z') \subset \overline{G}$, назовем функцией сдвига.

Возьмем $0 < R \leq R_1$, $k(z) = \max(R/d(z), 1)$ и рассмотрим марковское семейство Ξ с переходной функцией, имеющей плотность

$$p(z, y) = \frac{k^{m-2}(z)(2k(z) - 1)d^m(z)}{|z - y|^m}$$

относительно равномерного распределения $\mu_{z'}$ на сфере $S_{z'}$. Будем называть такое семейство R-сферическим семейством со сдвинутыми центрами.

Теорема 3.2.1. *Для R-сферического семейства со сдвинутыми центрами в R_1-регулярной области G существуют такие положительные константы C_1, C_2 и ε_0, что для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $x \in G$*

$$\mathbf{E}_x \nu_\varepsilon \leq C_1 \ln |\ln \varepsilon| + C_2. \tag{6}$$

Более того, неравенство (6) является точным по порядку в том смысле, что для $G = \{y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(m)}) \in \mathbb{R}^m, 0 < y^{(m)} < 2R\}$ выполняется и противоположное неравенство (теорема 2.2). Отметим, что используемые на практике марковские цепи соответствуют $k(z) = 1$ и для них имеет место неравенство $\mathbf{E}_x\nu_\varepsilon \leq C_1|\ln \varepsilon| + C_2$.

Марковская цепь, исследованная в теоремах 2.1 и 2.2, используется при стохастическом решении внутренних задач Дирихле. Для внешних задач требуется ее модификация, описанная в подразделе 2.2 главы 3. Соответствующее утверждение (теорема 2.3) снова дает оценку с повторным логарифмом (6).

Последний раздел третьей главы посвящен применению полученных результатов к решению ряда краевых задач математической физики. Сначала (подраздел 3.1) на примере внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона иллюстрируется связь между известными представлениями решения таких задач с использованием винеровского процесса и монте-карловскими оценками.

Наконец, в подразделе 3.2 кратко обсуждаются алгоритмические аспекты решения методом Монте-Карло нескольких внутренних и внешних задач Дирихле, связанных с оператором Лапласа, с помощью обычного и модифицированного сферического процессов со сдвинутыми центрами.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Голяндина Н.Э., Некруткин В.В. О вариантах сферического процесса, быстро сходящихся к границе // Системное моделирование в информатике, Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. С. 3–12.

[2] Некруткин В.В., Пригаро (Голяндина) Н.Э. О скорости сходимости к границе некоторых вариантов сферического процесса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986. Т. 26. № 4. С. 626–631.

[3] Голяндина Н.Э. Некоторые функциональные неравенства и исследование скорости сходимости марковских цепей к границе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1991. Т. 31. № 7. С. 1029–1041.

[4] Golyandina N. Monte Carlo solution of boundary problems for the Laplace operator // Mathematical methods in stochastic simulation and experimental design: Proc. 2nd St.Petersburg Workshop on simulation, St.Petersburg, June 18–21, 1996. St.Petersburg University Press, 1996. P. 81–86.

[5] Golyandina N. Markov processes for solving differential equations in measure spaces // Mathematical methods in stochastic simulation and experimental design: Proc. 2nd St.Petersburg Workshop on simulation, St.Petersburg, June 18–21, 1996. St.Petersburg University Press, 1996. P. 75–80.

[6] Golyandina N. Rate of convergence of Markov processes to the solution of homogeneous Boltzmann type equation // Workshop on Numerical Methods for Kinetic Equations: Book of Abstracts, Berlin, 1997. P. 17.

[7] Golyandina N. Stratification for functionals on measure spaces // Proc. 3-d St.Petersburg Workshop on simulation, St.Petersburg, June 28 – July 3, 1998. St.Petersburg University Press, 1998. P. 25–30.