Санкт–Петербургский государственный университет

на правах рукописи

Кучкова Ирина Николаевна

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Специальность
05.13.18 — математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2002

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования математико-механического факультета С.-Петербургского государственного Университета

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор *Ермаков Сергей Михайлович.*

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук, профессор *Седунов Евгений Витальевич,*
кандидат физ.-мат. наук *Сережина Вера Глебовна.*

Ведущая организация:
Институт проблем машиноведения РАН.

Защита состоится “ ” 2002 г. в ..... часов на заседании диссертационного совета Д.212.232.55 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., дом 28, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, дом 7/9.

Автореферат разослан “ ” 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного Совета Б.К. Мартыненко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Метод статистического моделирования традиционно широко применяется при численном решении задач, таких как задача Дирихле, уравнения Больцмана, уравнения переноса, в которых решение представляется в виде ряда Неймана или его нелинейного аналога.

Применение этого метода обусловлено большим объемом задач, возникающих в практических областях математики и механики. Особую практическую значимость алгоритма статистического моделирования придает тот факт, что он допускает естественные расспараллеливание. Дополнительную привлекательность методам придает то, что вычисленные величины, представленные в виде функционала от решения интегрального уравнения, позволяют оценивать значения во многих точках при однократном моделировании решения интегрального уравнения.

В последние годы предложены новые алгоритмы Ермаковым С.М., Некруткиным В.В. и Сипиным А. С. (1989), Сабельфельдом К.К., Симоновым Н. А., Курбанмурадовым О. А.(1992), Арсеньевым Д.Г., Ивановым В.М., Кульчицким О.Ю.(1996), расширяющие сферу применения этого метода на решение интегральных уравнений с сингулярным ядром, для которых представление в виде ряда Неймана не имеет места. К таким уравнениям приводят, например, задачи теории упругости, гидромеханики, однако дисперсия этих оценок была не достаточно изучена или результаты были получены при дополнительных ограничениях (например, только для случая выпуклых областей).

В настоящей диссертаци предложены новые алгоритмы для решения сингулярных уравнений, (в частности, задач механики) имеющие конечную дисперсию. Реализованы разработанные алгоритмы для ряда модельных примеров.

Диссертация состоит из двух частей: первая часть посвящена исследованию сингулярных интегральных уравнений и получению оценок с ограниченной дисперсией для их численных решений, а во второй предложены алгоритмы для вычисления градиента от решения некоторого сингулярного уравнения для области в $\mathbb{R}^2$ с границей, состоящей из конечного числа гладких кривых. Особое внимание уделено поведению полученных решений вблизи границ области.

Цели работы

—представление решений некоторых уравнений с сингулярным ядром в виде рядов многомерных интергалов, к которым применим метод Монте-Карло.

— построение статистических оценкок с конечной дисперсией для численных решений сингулярных уравнений при некоторых условиях на область поиска решения. Исследование поведения этих решений в малых окрестностях границы области.

— реализование разработанных алгоритмов для ряда модельных примеров.

Общие методы исследования.

В работе применяется математический аппарат теории сингулярных интегралов, теории символа оператора, теории потенциалов. Для разработки алгоритмов, приведенных в работе, используются методы интегральных уравнений, метод Монте-Карло, метод моделирования вихрей для уравнений Навье Стокса, определители Фредгольма, а также язык программирования C++ (в среде Microsoft Visual C++) и пакеты обработки данных (Maple, Mathcad).

Научная новизна.

Впервые были построены несмещенные оценки с конечной дисперсией для ряда сингулярных интегральных уравнений, таких как система уравнений, описывающих первую задачу теории упругости, и уравнение для градиента решения задачи Неймана (без предположения о выпуклости или гладкости области). Для достижения полученных результатов был усовершенствован существующий математический аппарат численного решения сингулярных уравнений, для чего был доказан ряд вспомогательных теорем.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический и практический характер. Результаты, полученные в диссертации могут быть использованы при дальнейшем изучении построения статистических оценок для численного решения сингулярных интегральных уравнений в механике.

Данная работа дает возможность провести сравнительный анализ полученных решений и экспериментальных данных.

Также использование полученных оценок возможно:

— во-первых, при решении первой основной задачи упругости с различными краевыми условиями для области, граница которой представляет собой связную замкнутую поверхность Ляпунова.

— во вторых, при решения уравнений Навье Стокса для нахождения поведения потока жидкости для различных областей, имеющих границу, состоящую из конечного числа гладких кусков.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры статистического моделирования математико-механического факультета СПбГУ, а также на 3-ем и 4-ом Международных Санкт-Петербургских семинарах по моделированию (июнь 1998г. и июнь 2001г).

Работа над диссертацией была поддержана грантом РФФИ(NN 96-01-00644, 98-01-00345).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–3], перечисленных в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения со сквозной нумерацией разделов, рисунков, таблиц, списка используемой литературы. Текст диссертации изложен на 94 страницах. Библиография содержит 74 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** показывается актуальность темы и ставятся цели работы. Рассматривается краткое содержание работы.

В **первой** главе диссертации даются основные понятия теории сингулярных интегралов и краткий обзор основных результатов, полученных предыдущими исследователями.

Далее описываются основная идея метода Монте-Карло и его применение для решения краевых задач, предложенное ранее в работах Ермакова С. М., Некруткина В. В., Сипина А. С. (1989), Каштанова Ю.Н. (1985), Сабельфельда К.К., Симоновым Н. А., Курбанмурадовым О. А. (1989), Арсеньевым Д.Г., Ивановым В.М., Кульчицкого О.Ю.(1996).

Вторая глава диссертации посвящена решению сингулярного интегрального уравнения полученного в результате преобразования уравнений Ламе и построению статистических оценок с конечной дисперсией для этого решения.

В *разделе 2.1* дается постановка задачи.

Решение нахождения вектора смещения для упругого изотропного тела, описывающего уравнениями Ламе ищется в виде

$$U(x) = \int_\Gamma H(x, y)\Psi(y) dS_y, \tag{1}$$

где $H(x, y)$ имеет особенность, а $\Psi(y)$ - удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению.

$$\Psi(x) = \mathbf{K}\Psi(x) + \mathbf{T}\Psi(x) + F(x), \tag{2}$$

где $\mathbf{K}$ - сингулярный оператор, $\mathbf{T}$ - оператор со слабой особенностью, $F(x)$ - определяется из граничных условий.

В *разделе 2.2* уравнение (2) преобразуем к интегральному уравнению, у которого ядро и свободный член ограничены.

Во-первых, определяется оператор K_x, который действут в плоскости касательной к Γ в точке x и доказывается, что $\mathbf{\Phi_x} = (\mathbf{I} - \mathbf{K_x})^{-1} = \mathbf{I} + C(\mathbf{K_x} + \mathbf{K_x}^2)$, где C - определяется через константы Ламе.

Во-вторых, при помощи оператора $\mathbf{\Phi_x}$ преобразовывается уравнение (2) и получается интегральное уравнение, у которого ядро со слабой особенностью и его решение совпадает с решением (2).

$$\Psi(x) = \mathbf{L}\Psi(x) + \tilde{F}(x), \tag{3}$$

Далее вводится пространство $X = \Gamma \times I$, где $I = \{1, 2, 3\}$, и обозначения $\xi = (x, i)$, $\eta = (y, j)$, $\psi(\xi) = \Psi_i(x)$, $\tilde{f}(\xi) = \tilde{F}_i(x)$, $l(\xi, \eta) = L_{ij}(x, y)$. Используя новые обозначения, в скалярной форме уравнение (3) представляется в виде:

$$\psi(\xi) = \int\limits_X l(\xi, \eta)\psi(\eta) d\mu_\eta + \tilde{f}(\xi). \tag{4}$$

Ядро $l(\xi, \eta)$ разделяется на две части

$$l(\xi, \eta) = l(\xi, \eta)\chi_{|x-y|<2\delta} + l(\xi, \eta)\chi_{|x-y|>2\delta} = m(\xi, \eta) + n(\xi, \eta), \tag{5}$$

Далее уравнение (4) преобразуется, используя (5), так что в новом интегральном уравнении ядро $\tilde{l}(\xi, \eta)$ и свободный член $f(\xi)$ ограничены, а решение преобразованного уравнения представляется по методу Фредгольма.

$$\psi(\xi) = f(\xi) + \frac{1}{\Delta} \int_X d\mu_\eta D(\xi, \eta) f(\eta), \tag{6}$$

где

$$\Delta = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} \int\limits_{X^t} \det\{\tilde{l}(\xi_u, \xi_v)\}_{u,v=1}^t d\mu_{\xi_1} \dots d\mu_{\xi_t} \tag{7}$$

$$D(\xi_0, \eta_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^t}{t!} \int\limits_{X^t} \det\{\tilde{l}(\xi_u, \xi_v)\}_{u,v=0}^t d\mu_{\xi_1} \dots d\mu_{\xi_t}. \tag{8}$$

В *разделе 2.3* ищутся оценки Монте-Карло для решения уравнения (2).

Сначала строятся оценки для $m(\xi, \eta)$ и $n(\xi, \eta)$ из (5) с конечной дисперсией. Вводятся :

$$l(\xi, z, \eta) = \sum_k \frac{\varphi_k(\xi, \theta_{xz})}{|x - z|^2} \left[\frac{g_k(z, \xi)}{|z - y|^{2-\lambda}} - \frac{g_k(x, \xi)}{|x - y|^{2-\lambda}} \right]$$

и $p(x;z') = |x-z'|^{\lambda/2-2}$ - плотность распределения точки $\breve{z}'$ в δ - окрестности точки x, $\breve{z}$ соответствующая точка на Γ и случайная точка $\breve{y}$ распределена $p(x,z;y) = |y-x|^{\lambda/2-2} + |y-z|^{\lambda/2-2}$ в окрестности точки x, $\breve{j}$ равномерно распределена на I, $\breve{\xi} = (\breve{y}, \breve{j})$. Обозначаются

$$\begin{aligned}
\breve{m}(\xi) &= 3l(\xi, \breve{z}, \breve{\eta})/(p(x;\breve{z}')p(x,\breve{z};\breve{y}))\chi(|x-\breve{y}| < 2\delta), \\
\breve{n}(\xi,\eta) &= l(\xi,\breve{z},\eta)/p(x;\breve{z})\chi(|x-y| > 2\delta).
\end{aligned}$$

и доказывается:

Теорема 1. *Существуют такие δ, что для каждого ξ, η и ограниченной f на X*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\breve{m}(\xi)f(\breve{\eta}) &= \int d\mu_\eta m(\xi,\eta)f(\eta),\ \breve{m}(\xi) \le m_1 < 1, \\
\mathbf{E}\breve{n}(\xi,\eta) &= n(\xi,\eta),\ \breve{n}(\xi,\eta) \le C.
\end{aligned}$$

Дальше определяется подобным образом $\breve{m}(\xi_1,\xi_2)$ для близких друг к другу точек $\xi_1 = (x_1, i)$, $\xi_2 = (x_2, i)$, и показывается, что для случайной величины $\breve{m}(\xi_1,\xi_2)$ справедлива:

Теорема 2. *Выполняется следующее*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\breve{m}(\xi_1,\xi_2)f(\breve{\eta}) &= \int_X d\mu_\eta m(\xi_1,\eta)f(\eta) - \int_X d\mu_\eta m(\xi_2,\eta)f(\eta), \\
\mathbf{E}\breve{m}^2(\xi_1,\xi_2) &\le C|x_1-x_2|^{\lambda/2}.
\end{aligned}$$

Далее строятся статистические оценки для вектора смещений (1) используя схему в [2], в частности находятся случайные величины, которые являются несмещенными оценками с конечной дисперсией для каждого члена ряда в ряду (7) .

В *разделе 2.3* решается первая задача теории упругости для шара, используя вышеизложенный в главе 2 алгоритм. Задается несимметричное граничное условие. Приведены графики результатов.

Третья глава состоит из двух частей. В первой части строятся статистические оценки для градиента от решения некоторого сингулярного уравнения для области в $\mathbb{R}^2$ с границей, состоящей из конечного числа гладких кривых, которые, в отличие от уже известных, не используют предположения о выпуклости области или ее гладкости. Во второй части полученные оценки применяются для решения уравнений Навье Стокса.

Предполагается, что X — ограниченная область в R^2 с границей Γ, которая состоит из конечного числа кусков гладких кривых.

В начале получается представление градиента достаточно гладкой гармонической функции $\varphi \in C^2(\bar{X})$ через значения ее производных на границе.

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial l} = -\int_\Gamma dS_y \varphi(y) \frac{\partial_x}{\partial l} \frac{\partial_y H(x,y)}{\partial n_y} + \int_\Gamma dS_y \frac{\partial_x H(x,y)}{\partial l} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n_y}, \qquad (9)$$

где l - произвольное направление и $H(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y|$.

Затем на основе этого представления выводится интегральное уравнение для касательной производной на границе.

$$\varphi_\tau(x) = -\int_\Gamma dS_y \varphi_\tau(y) k(y,x) + \tilde{f}(x),\ x \in \Gamma, \qquad (10)$$

где $k(y,x) = -2\partial H(y,x)/\partial n_x$, $\varphi_\tau(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \tau}$ и

$$\tilde{f}(x) = v.p.2 \int_\Gamma dS_y \frac{\partial_x H(x,y)}{\partial \tau_x} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial n_y}$$

Полученное уравнение преобразуется таким образом, чтобы в новом интегральном уравнении ядро и свободный член были ограничены.

$$\tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}\mathbf{K} + \bar{f}, \qquad (11)$$

Решение преобразованного уравнения представляется по методу Фредгольма (6),(7),(8).

Для этого представления строятся статистические оценки с ограниченной дисперсией. Полученные оценки с помощью интегрального представления, полученного (9), затем используются для оценивания градиента функции внутри области. Заметим, что данная схема позволяет производить одновременное оценивание в любом заданном количестве точек.

Дальше приводится общий алгоритм метода моделирования вихрей для решения уравнений Навье Стокса. В этом методе исходные уравнения приводятся к виду диффузионного движения распределения вихрей. Последнее аппроксимируется конечным набором вихревых элементов, которые диффундируют вдоль поля скоростей, порожденного самими этими элементами. При этом учитывается то условие, что поле скоростей не может пересекать неподвижную границу. Именно это условие и выражается в виде некоторой задачи Неймана. Поскольку на твердых стенках скорость жидкости должна совпадать со скоростью стенки, то разница в указанных скоростях порождает новые вихревые элементы.

Этот алгоритм был реализован и опробован на тестовых задачах. Моделировалось движение жидкости в каверне с движущейся стенкой и в трубе со ступенькой при различных числах Рейнольдса. Приведены графики расчетов.

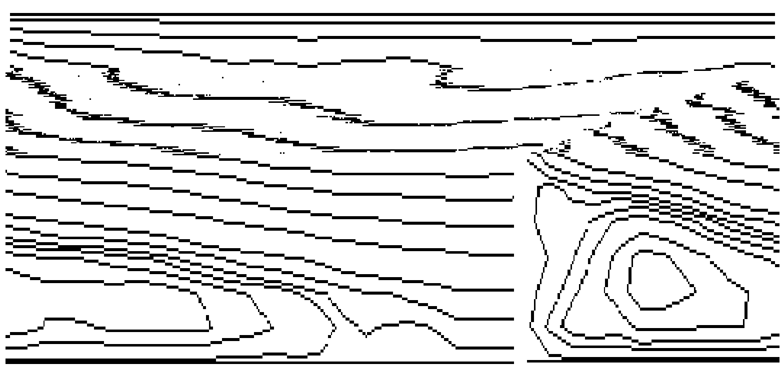

Рис. 1: Линии тока для трубы со ступенькой.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

1. Решение сингулярных интегральных уравнений представлено в виде рядов многомерных интегралов, для вычисления которых применим метод Монте-Карло.

2. Построены несмещенные оценки Монте-Карло с конечной дисперсией для численного решения уравнений Ламе для областей с границей, которая представляет собой связную замкнутую поверхность Ляпунова.

3. Построены статистические несмещенные оценки, имеющие конечную дисперсию вплоть до границы для градиента решения задачи Неймана для более широкого класса областей, которые не используют предположения о выпуклости области или ее гладкости. Граница области предполагается состоящей из конечного числа кусков гладких кривых.

4. Проведены численные эксперименты, в частности
— решена первая основная задача теории упругости для шара при задании не симметричного граничного условия, используя найденные оценки. Приведены графики расчетов.
— произведена апробация полученных оценок при решении уравнений Навье Стокса. Этот алгоритм реализован и опробован на тестовых задачах. Моделировалось движение жидкости для различных областей. Приведены графики расчетов.

По теме диссертации автором опубликованы следующие работы:

[1] *Kashtanov Y. N., Kuchkova I. N.* Monte Carlo Algorithms in Vortex Simulation. // Proc. 3rd St. Petersburg Workshop on Simulation. СПб, Изд-во НИИ Химии СПбГУ. 1998, с.81-85.

[2] *Kashtanov Y. N., Kuchkova I. N.* Monte Carlo Algorithms For Neumann Boundary Value Problem Using Fredholm Representation.// Advances in Stochastic Simulation Methods. N.Balakrishnan, V. Melas, S. Ermakov, eds. Birkhauser. Boston, Basel, Berlin, 2000, p.17-67.

[3] *Kashtanov Y. N., Kuchkova I. N.* Monte Carlo Method for Solving the Integral Equation of the Theory of Elasticity. // Proc. 4th St. Petersburg Workshop on Simulation. СПб, Изд-во НИИ Химии СПбГУ. 2001, с.41-46.