

Министерство образования Российской Федерации  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

На правах рукописи

ДЕНИС СЕРГЕЕВИЧ МИЛОВ

**МЕТОДЫ ИДЕМПОТЕНТНОЙ  
АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ  
СЕТЕЙ С ОЧЕРЕДЯМИ**

Специальность 05.13.18 – Теоретические основы  
математического моделирования, численные методы и  
комплексы программ.

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель –  
кандидат физико-математических наук,  
доцент Н. К. Кривулин

Санкт-Петербург

2000

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Идемпотентная алгебра</b>	<b>8</b>
1.1 Идемпотентные полугруппы и полукольца . . . . .	8
1.2 Определение и обозначения скалярной $(\max, +)$ -алгебры . .	9
1.3 Основные свойства скалярной $(\max, +)$ -алгебры . . . . .	9
1.4 Матричная $(\max, +)$ -алгебра и ее основные свойства . . . .	10
1.5 Матрица смежностей ориентированного графа в $(\max, +)$ - алгебре и ее свойства . . . . .	13
1.6 Уравнение $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ и его разрешимость . . . . .	14
<b>2 Алгебраическая модель сети с очередями</b>	<b>17</b>
2.1 Общие понятия . . . . .	17
2.2 Модели сетей с операциями синхронизации . . . . .	18
2.3 Частный класс сетей с операциями синхронизации . . . . .	22
2.4 Среднее время рабочего цикла сети из частного класса . .	24
<b>3 Матричные операторы в <math>(\max, +)</math>-алгебре и их свойства</b>	<b>26</b>
3.1 Определение четырех операторов . . . . .	26
3.2 Обычные свойства операторов в $(\max, +)$ -алгебре . . . . .	28
3.3 Вероятностные свойства операторов в $(\max, +)$ -алгебре . .	31
<b>4 Стохастические сети</b>	<b>39</b>
4.1 Определение стохастических сетей и основные свойства, связанные с ними . . . . .	39
4.2 Среднее время работы стохастических сетей с отказами . .	42

4.3	Оценивание среднего времени работы сети . . . . .	43
4.4	Нижние оценки . . . . .	46
4.5	Верхние оценки . . . . .	48
4.6	Примеры . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Примеры использования <math>(\max, +)</math>-алгебры для описания динамики ряда частных сетей</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Оптимизация вычислений детерминированных сетей</b>	<b>63</b>
6.1	Иерархия сетей и ее уровни . . . . .	63
6.1.1	Уровни иерархии . . . . .	64
6.1.2	Перенумерация узлов . . . . .	65
6.1.3	Переходная матрица для сети с перенумерованными узлами . . . . .	67
6.2	Алгоритмы оптимизации вычислений при моделировании сетей с синхронизацией . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Описание программы FJS</b>	<b>72</b>
	<b>Заключение</b>	<b>74</b>
	<b>Библиография</b>	<b>76</b>
	<b>Приложения</b>	<b>84</b>

# Введение

Методы анализа динамических систем условно можно разделить на две основные, несомненно, пересекающиеся части: аналитические методы и имитационные. Те и другие получили широкое признание во всем мире, своих приверженцев и противников, свои научные школы и направления в развитии. На данный момент затруднительно перечислить даже малую долю всех научных докладов, статей и монографий, которые посвящены этой теме. К примеру, в книге Ермакова С.М. [10], вышедшей в свет в 1971 году, указывается тот факт, что в период с 1955 по 1970 годы только в нашей стране вышло более 2000 научных публикаций посвященных лишь методу Монте-Карло, а ведь это не охватывает всей области, в которой ведутся исследования посвященные анализу динамических систем и смежным вопросам.

Большой вклад в данную область внесли исследования аналитических методов анализа в работах Гнеденко Б.В. [7, 8], Колмогорова А.Н. [8, 15], Феллера В. [28] и др.

В области имитационных методов анализа динамических систем хотелось бы отметить работы Бусленко Н.П. [3, 4], Ермакова С.М. [10, 11, 12, 35, 36, 37], Романовского И.В. [26], Соболя И.М. [27] и др.

Однако стоит отметить, что указанные ученые и их коллеги нередко ведут свои исследования в областях, занимающих промежуточное положение между аналитическими и имитационными методами анализа. Это связано, прежде всего, с рядом проблем по использованию этих методов в чистом виде. Аналитические методы зачастую накладывают весьма жесткие условия на рассматриваемые модели, существенно сужая класс рассматриваемых задач (как пример, узкий диапазон распределений в

Теории Массового Обслуживания). Имитационные модели страдают зачастую другим недостатком - сложностью описания модели и учета всех ее характеристик. Одно из решений данной проблемы видится в нахождении математических аппаратов, позволяющих описывать динамические уравнения и характеристики больших систем в удобном для анализа и моделирования виде.

В последние годы в мире получил довольно широкое признание и интерес метод анализа, который основан на использовании аппарата идемпотентных алгебр. Здесь можно привести в пример работы Кингмена Ж.Ф.С.[45], Колокольцова В.Н.[24], Кунингхэм-Грина Р.А.[33], Маслова В.П. [24] и др.

Однако стоит отметить, что вопросы, связанные с данной областью, поднимались еще в 60-е годы Романовским И.В. в [26], где были получены результаты, связанные с решением дискретного уравнения Беллмана, а также Воробьевым Н.Н. [5], которым был описан ряд задач и методика их решения с помощью аппарата минимаксной алгебры.

В нашей стране существует школа Маслова В.П., занимающаяся более теоретическими аспектами идемпотентных алгебр в применении их к вопросам оптимального управления, что отражено, к примеру, в книге Маслова В.П. и Колокольцова В.Н. [24].

В последние годы заметный интерес возник к описанию динамики сетевых систем с очередями с помощью идемпотентных алгебр, в частности,  $(\max, +)$ -алгебры. Здесь стоит отметить работы Кривулина Н.К. [20, 21, 22, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 63, 64, 65].

В диссертации рассматриваются вопросы исследования динамики широкого класса систем с операцией синхронизации обслуживания требований. Рассматриваются динамические уравнения для этих систем в идемпотентной  $(\max, +)$ -алгебре, условия приведения этих уравнений к явному виду, оценивается среднее времени работы систем с вероятностью сбоя. Проводится анализ иерархических структур в данных системах и на его основе строится алгоритм оптимизации их моделирования. Также представлены результаты, полученные при исследовании ряда частных

систем.

Основой для исследований, которым посвящена диссертация, послужил тот факт, что динамика всех рассматриваемых систем описывается линейными в данной идемпотентной  $(\max, +)$ -алгебре уравнениями. Это, в свою очередь, позволяет достаточно просто реализовывать моделирующие алгоритмы для таких систем.

Также в диссертации рассматриваются свойства (обычные и вероятностные) ряда матричных операторов в данной  $(\max, +)$ -алгебре. С их помощью находится или оценивается ряд динамических характеристик для систем.

Материал диссертации разбит на главы, каждая из которых посвящена отдельному вопросу.

— Первая глава носит вводный характер и дает краткий обзор понятий, связанных с идемпотентными алгебрами и с  $(\max, +)$ -алгеброй, в частности.

— Во второй главе представлены основные результаты, полученные ранее другими авторами, и посвященные алгебраическому представлению динамики одного класса сетей с очередями со строго детерминированной топологией сетевого графа.

— В третьей главе автор представляет вспомогательные результаты, связанные с простыми и вероятностными свойствами матричных операторов, которые используются в дальнейшем.

— Четвертая глава целиком посвящена стохастическим сетям, где автор определяет новый класс сетей с очередями со случайной топологией сетевого графа, вводит понятие сбоя в работе сетей данного типа и среднего времени их работы. Рассматривается ряд оценок полученных автором совместно с его научным руководителем.

— Пятая глава посвящена примерам использования аппарата идемпотентной  $(\max, +)$ -алгебры для описания динамики ряда частных систем. Там же, в качестве примеров, представлены результаты моделирования и оценок для ряда сетей.

— В шестой главе автор представляет алгоритм оптимизации количе-

ства вычислений при моделировании сетей со строго определенной топологией сетевого графа.

— Седьмая глава содержит краткое описание программы FJS, осуществляющей моделирование работы сетей со случайной топологией.

Диссертация содержит также ряд конкретных примеров, демонстрирующих рассмотренные понятия и полученные результаты.

Отметим, что область применения аппарата  $(\max, +)$ -алгебры, несомненно, шире и заслуживает пристального внимания.

# Глава 1

## Идемпотентная алгебра

### 1.1 Идемпотентные полугруппы и полукольца

В основании идемпотентной алгебры лежит понятие идемпотентного полукольца. Идемпотентной полугруппой называется множество  $M$ , снабженное коммутативной и ассоциативной операцией  $\oplus$  (обобщенным сложением), обладающей нейтральным относительно этой операции элементом  $\mathbf{0}$ :  $\mathbf{0} \oplus a = a$  для любого  $a \in M$  и удовлетворяющих условию идемпотентности  $a \oplus a = a$  для любого  $a \in M$ . Идемпотентная полугруппа называется идемпотентным полукольцом, если на ней определена еще одна ассоциативная операция  $\otimes$  (обобщенное умножение), обладающей нейтральным относительно этой операции элементом  $\mathbf{1}$  и связанная с  $\oplus$  законом дистрибутивности слева и справа

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c, \quad (b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a,$$

Идемпотентное полукольцо называется коммутативным и абелевым, если операция  $\otimes$  коммутативна.

В качестве примеров можно привести (см., например, [24]):

1.  $M = R \cup \{+\infty\}$  с операциями  $\oplus = \min$ ,  $\otimes = +$ , нейтральными элементами  $\mathbf{0} = +\infty$ ,  $\mathbf{1} = 0$ .
2.  $M = R \cup \{-\infty\}$  с операциями  $\oplus = \max$ ,  $\otimes = +$ , нейтральными элементами  $\mathbf{0} = -\infty$ ,  $\mathbf{1} = 0$ . Заметим, что это полукольцо изоморфно предыдущему. Оно также послужит нам основой для дальнейших рассуждений.



3.  $M = R \cup \{\pm\infty\}$  с операциями  $\oplus = \min$ ,  $\otimes = \max$ , нейтральными элементами  $\mathbf{0} = +\infty$ ,  $\mathbf{1} = -\infty$ .

## 1.2 Определение и обозначения скалярной $(\max, +)$ -алгебры

Рассмотрим множество вещественных чисел  $\underline{R}$ , расширенное путем добавления элемента  $\varepsilon = -\infty$ , с заданными на нем операциями  $\oplus$  и  $\otimes$ , которые для любых  $x, y \in \underline{R}$  определяются следующим образом:

$$x \oplus y = \max(x, y), \quad x \otimes y = x + y,$$

причем  $x \otimes \varepsilon = \varepsilon$ .

Множество  $\underline{R}$  с операциями  $\oplus$  и  $\otimes$  является коммутативным полукольцом с идемпотентным сложением, нулевым и единичными (нейтральными, относительно операций  $\oplus$  и  $\otimes$  соответственно) элементами которого являются числа  $\varepsilon$  и  $0$  соответственно. Полукольцо с указанными свойствами обычно называют идемпотентной алгеброй (см., например, [5, 24]).

## 1.3 Основные свойства скалярной $(\max, +)$ -алгебры

Нетрудно заметить, что операции  $\oplus$  и  $\otimes$  сохраняют ряд свойств обычного сложения и умножения:

для любых  $x, y, z \in \underline{R}$

- 1)  $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$  (ассоциативность),
- 2)  $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$  (ассоциативность),
- 3)  $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$  (дистрибутивность),
- 4)  $x \oplus y = y \oplus x$  (коммутативность),
- 5)  $x \otimes y = y \otimes x$  (коммутативность),
- 6)  $x \oplus \varepsilon = x$  (существование нулевого элемента),
- 7)  $x \oplus x = x$  (идемпотентность),

- 8)  $x \otimes \varepsilon = \varepsilon$  (свойство поглощения),  
 9)  $x \otimes 0 = x$  (существование единичного элемента).

Заметим, что в отличие от обычного сложения, операция  $\oplus$  обладает свойством идемпотентности, которое и определяет основные особенности этой алгебраической системы. Операции  $\oplus$  и  $\otimes$  также обладают свойством монотонности, т.е. из неравенств  $a \leq c$  и  $b \leq d$  следуют неравенства  $a \oplus b \leq c \oplus d$  и  $a \otimes b \leq c \otimes d$  для  $\forall a, b, c, d \in \underline{R}$ .

## 1.4 Матричная $(\max, +)$ -алгебра и ее основные свойства

Идемпотентная алгебра (полукольцо) вещественных матриц вводится обычным путем (см., например, [5, 24, 57]): для любых двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  размера  $l \times n$  для операции  $\oplus$  и, соответственно,  $l \times n$  и  $n \times m$  для операции  $\otimes$ , выполнение рассматриваемых операций осуществляется по формулам:

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \quad \text{и} \quad \{A \otimes B\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj}.$$

В  $(\max, +)$ -алгебре определены также операции умножения матрицы на скаляр и сложения матрицы и скаляра. Так для любого  $\lambda \in \underline{R}$  и матрицы  $A = (a_{ij})$  размера  $l \times n$

$$\{\lambda \oplus A\}_{ij} = \lambda \oplus a_{ij} \quad \text{и} \quad \{\lambda \otimes A\}_{ij} = \lambda \otimes a_{ij}.$$

Матрица  $\mathcal{E}$ , все элементы которой равны  $\varepsilon$ , является нейтральным элементом относительно операции  $\oplus$ , а матрица  $E$  с элементами, равными 0 на главной диагонали и  $\varepsilon$  – вне ее, представляет собой единичную матрицу:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \dots & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $A \neq \mathcal{E}$  – квадратная матрица. Как обычно, положим  $A^{\otimes 0} = E$  и  $A^{\otimes k} = A \otimes A^{\otimes(k-1)} = A^{\otimes(k-1)} \otimes A$  для любого целого  $k \geq 1$ .

Операции  $\oplus$  и  $\otimes$  обладают свойством монотонности, т.е. из неравенств для матриц  $A \leq C$  и  $B \leq D$  следуют неравенства  $A \oplus B \leq C \oplus D$  и  $A \otimes B \leq C \otimes D$ . Это следует из

$$\begin{aligned} \{A \oplus B\}_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} \leq c_{ij} \oplus b_{ij} \leq c_{ij} \oplus d_{ij} = \{C \oplus D\}_{ij}, \\ \{A \otimes B\}_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} \leq \bigoplus_{k=1}^n c_{ik} \otimes b_{kj} \leq \bigoplus_{k=1}^n c_{ik} \otimes d_{kj} = \{C \otimes D\}_{ij}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что для любой квадратной матрицы  $A = (a_{ij})$  размера  $n \times n$ :

- 1)  $E \otimes A = A \otimes E = A$ ,
- 2)  $\mathcal{E} \oplus A = A \oplus \mathcal{E} = A$ ,
- 3)  $\mathcal{E} \otimes A = A \otimes \mathcal{E} = \mathcal{E}$ .

Действительно, для любых  $i, j = 1, \dots, n$  и матрицы  $A = (a_{ij})$  размера  $n \times n$ :

$$\begin{aligned} \{E \otimes A\}_{ij} &= 0 \otimes a_{ij} = a_{ij} \otimes 0 = \{A \otimes E\}_{ij} = a_{ij}, \\ \{\mathcal{E} \oplus A\}_{ij} &= \varepsilon \oplus a_{ij} = a_{ij} \oplus \varepsilon = \{A \oplus \mathcal{E}\}_{ij} = a_{ij}, \\ \{\mathcal{E} \otimes A\}_{ij} &= \varepsilon \otimes a_{ij} = a_{ij} \otimes \varepsilon = \{A \otimes \mathcal{E}\}_{ij} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Представим здесь также еще ряд свойств. Так для любых двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  размера  $n \times n$  справедливо

$$A \oplus B = B \oplus A.$$

Действительно,

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = b_{ij} \oplus a_{ij} = \{B \oplus A\}_{ij}.$$

Теперь рассмотрим свойство дистрибутивности. Для любых трех матриц  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  и  $C = (c_{ij})$ , размерность которых соответственно  $l \times n$ ,  $n \times t$  и  $n \times t$ , справедливо

$$A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C).$$

Действительно, используя свойство дистрибутивности из скалярной  $(\max, +)$ -алгебры, получим

$$\begin{aligned} \{A \otimes (B \oplus C)\}_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes (b_{kj} \oplus c_{kj}) \\ &= \left( \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes c_{kj} \right) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C). \end{aligned}$$

Аналогично, для любых трех матриц  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  и  $C = (c_{ij})$ , размерность которых соответственно  $l \times n$ ,  $l \times n$  и  $n \times m$ , справедливо

$$(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C).$$

Сформулируем следующее свойство для любых двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ , размерность которых соответственно  $l \times n$  и  $n \times m$ , а все элементы неотрицательны или равны  $\varepsilon$ . Тогда элементы матрицы  $C = A \otimes B$  размерности  $l \times m$  обладают тем же свойством. Действительно, это справедливо, так как

$$c_{ij} = \{A \otimes B\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj},$$

а для любых  $i = 1, \dots, l$  и  $j = 1, \dots, m$  значение  $a_{ik} \otimes b_{kj}$ , где  $k = 1, \dots, n$  неотрицательно либо равно  $\varepsilon$ .

Проведя подобные рассуждения для любых двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  размера  $l \times n$ , элементы которых неотрицательны или равны  $\varepsilon$ , можем сформулировать аналогичное утверждение для элементов матрицы  $C = A \oplus B$  размерности  $n \times n$ . Они также неотрицательны либо равны  $\varepsilon$ .

Отсюда мы можем сформулировать свойство о том, что если элементы исходных матриц и векторов неотрицательны либо равны  $\varepsilon$ , то при стандартных операциях  $(\oplus$  и  $\otimes)$  между такими матрицами и векторами (если они возможны с точки зрения размерностей данных матриц и векторов), элементы получающихся матриц и векторов обладают описанными выше свойствами (то есть неотрицательны либо равны  $\varepsilon$ ).

## 1.5 Матрица смежностей ориентированного графа в $(\max, +)$ -алгебре и ее свойства

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу  $A = (a_{ij})$  размера  $n \times n$  с элементами из  $\underline{R}$ . Заметим, что она может рассматриваться как матрица смежности некоторого ориентированного графа (см., например, [33, 57]). Элемент  $a_{ij} \neq \varepsilon$  указывает на существование дуги  $(i, j)$  в графе, а  $a_{ij} = \varepsilon$  – на ее отсутствие.

Вычислим матрицу  $A^{\otimes 2} = A \otimes A$  и обозначим через  $a_{ij}^{\otimes(2)}$  ее элементы.  $a_{ij}^{\otimes(2)} \neq \varepsilon$  тогда и только тогда, когда существует по крайней мере один путь из узла  $i$  в узел  $j$ , который содержит две дуги. Аналогично, для любого целого  $k > 0$ , матрица  $A^{\otimes k}$  имеет элемент  $a_{ij}^{\otimes(k)} \neq \varepsilon$  тогда и только тогда, когда существует путь длины  $k$  из узла  $i$  в узел  $j$ . Действительно, так как

$$a_{ij}^{\otimes(k)} = \bigoplus_{i_1, \dots, i_{(k-1)}=1}^n a_{ii_1} \otimes a_{i_1 i_2} \otimes \dots \otimes a_{i_{(k-1)} j} \neq \varepsilon,$$

то это означает, что тогда существует последовательность индексов  $\{i_1, \dots, i_{(k-1)}\}$ , для которых все элементы  $a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, \dots, a_{i_{(k-1)} j}$  для матрицы  $A$  не равны  $\varepsilon$ . Отсюда следует наличие пути из узла  $i$  в узел  $j$  длины  $k$  через узлы соответствующие выделенным индексам.

Предположим, что граф, соответствующий матрице  $A$ , является ациклическим. Из выше представленных рассуждений следует, что  $A^{\otimes k} = \mathcal{E}$  для любого  $k > r$ , где  $r$  – длина наибольшего пути в графе. В противном случае, если соответствующий матрице  $A$  граф имеет цикл, то  $A^{\otimes k} \neq \mathcal{E}$  для всех  $k = 1, 2, \dots$

### Пример 1

В качестве примера рассмотрим две матрицы на рис.1 и рис.2, которые представляют собой матрицы смежностей представленных рядом с ними ориентированных графов. На рис.1 граф не имеет циклов и соответствующая ему матрица смежности циклична. Длина наибольшего пути в

данном графе равна 2. Отсюда должно выполняться условие  $A^{\otimes k} = \mathcal{E}$  для всех  $k > 2$ , что действительно имеет место. В втором же графе имеется цикл  $\{2, 3, 4, 2, \dots\}$  из чего следует  $A^{\otimes k} \neq \mathcal{E}$  для всех  $k = 1, 2, \dots$

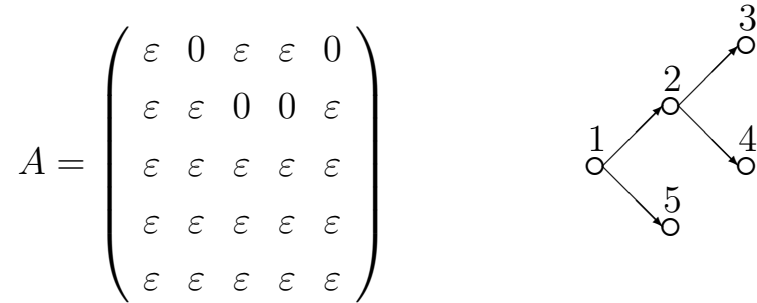


Рис.1.

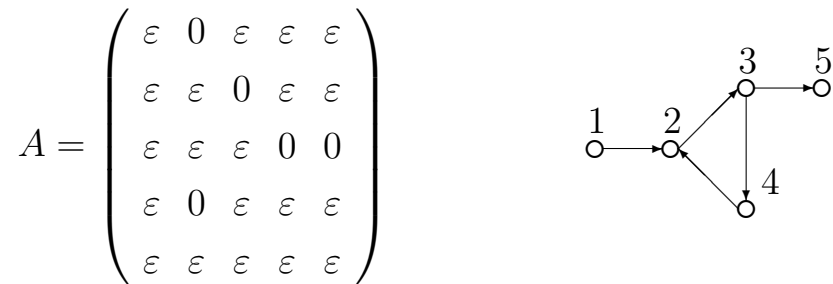


Рис.2.

## 1.6 Уравнение $\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}$ и его разрешимость

Будем рассматривать неявное относительно  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  уравнение следующего вида:

$$\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b}, \quad (1.1)$$

где  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  и  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$  соответственно  $(n \times n)$ -матрица и  $n$ -вектор. Знание условий разрешимости этого уравнения относительно  $\mathbf{x}$  имеет большое значение при исследовании разрешимости динамических уравнений сетей, которые будут определены в дальнейшем. Следующая лемма определяет условия, при которых существует явное решение (1.1) и его вид (см., например, [1, 47]):

**Лемма 1** Пусть элементы матрицы  $A$  и вектора  $\mathbf{b}$  либо положительны, либо равны  $\varepsilon$ . Тогда уравнение (1.1) имеет единственное решение  $\mathbf{x} \in \underline{R}$  тогда и только тогда, когда граф, соответствующий

матрице  $A$ , является ациклическим. В том случае, когда решение существует, оно представляется в виде

$$\mathbf{x} = (E \oplus A)^{\otimes r} \otimes \mathbf{b},$$

где  $r$  – длина наибольшего пути в графе.

**Доказательство.** Доказательство леммы начнем с подстановки  $\mathbf{x}$  из уравнения (1.1) в его правую часть. Прделаем такую операцию  $k$  раз:

$$\mathbf{x} = A \otimes \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = A^{\otimes(k+1)} \otimes \mathbf{x} \oplus (E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes k}) \otimes \mathbf{b},$$

где для матрицы  $A$ , соответствующей ациклическому графу (и только для такой матрицы)  $A^{(k+1)} = \mathcal{E}$  для всех  $k \geq r$ . С учетом того, что

$$(E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{\otimes k}) = (E \oplus A)^{\otimes k}$$

получаем утверждаемое в лемме. ■

## Пример 2

В качестве примера рассмотрим здесь неявное относительно  $\mathbf{x}$  уравнение вида (1.1) с матрицей  $A$  и вектором  $\mathbf{b}$  представленными на рис.3.

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 10 & 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ \varepsilon \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Рис.3.

Данное уравнение имеет единственное решение по лемме 1, так как граф соответствующий матрице  $A$  и представленный на рис.4 является ациклическим, а длина его наибольшего пути равна 3 (он проходит через

вершины 1, 2, 3 и 4).

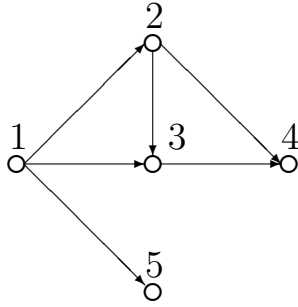


Рис.4.

Тогда решение данного уравнения можно представить в виде

$$\mathbf{x} = (E \oplus A)^{\otimes 3} \otimes \mathbf{b},$$

где

$$(E \oplus A)^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 14 & 19 & 26 \\ \varepsilon & 0 & 4 & 9 & 16 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 5 & 12 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательное решение запишется как  $\mathbf{x} = (27, 18, 14, 9, 1)^T$ .



## Глава 2

# Алгебраическая модель сети с очередями

### 2.1 Общие понятия

Рассмотрим сеть (см., например, [1, 57]), состоящую из  $n$  узлов, в каждом из которых имеется обслуживающее устройство и очередь. Топология сети описывается ориентированным ациклическим графом  $\mathcal{G} = (\mathbf{N}, \mathbf{A})$ , где  $\mathbf{N} = \{1, \dots, n\}$  – множество вершин графа, соответствующих узлам сети, а  $\mathbf{A} = \{(i, j)\} \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  – множество дуг графа, определяющих маршруты движения требований.

Для любого узла  $i \in \mathbf{N}$  определим множества узлов

$$\mathbf{P}(i) = \{j \mid (j, i) \in \mathbf{A}\}, \quad \mathbf{S}(i) = \{j \mid (i, j) \in \mathbf{A}\}.$$

Каждый узел  $i$ , для которого выполняется  $\mathbf{P}(i) = \emptyset$ , рассматривается как источник бесконечного потока требований, поступающих в сеть. Требования выводятся из сети после обслуживания в узлах  $i$ , для которых  $\mathbf{S}(i) = \emptyset$ . В начальный момент времени все обслуживающие устройства сети свободны, очередь требований в каждом узле-источнике имеет бесконечную длину, а очереди всех прочих узлов  $i$  содержат  $r_i$  требований, готовых к обслуживанию, где  $0 \leq r_i \leq \infty$ .

Обозначим через  $\tau_{ik}$  продолжительность, а через  $x_i(k)$  – момент времени завершения обслуживания  $k$ -го требования в узле  $i$ . Время прихода  $k$ -ого требования в очередь  $i$ -ого узла сети обозначим как  $a_i(k)$ . Пред-

полагается, что  $\tau_{ik}$  – заданные неотрицательные случайные величины и  $E[\tau_{ik}] < \infty$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , и  $k = 1, 2, \dots$ . При условии, что сеть начинает функционировать в нулевой момент времени, положим  $x_i(0) = 0$  и  $x_i(k) = \varepsilon$  для всех  $k < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Тогда, из сделанных выше предположений, динамика любого узла может быть описана при помощи уравнения

$$x_i(k) = \tau_{ik} \otimes a_i(k) \oplus \tau_{ik} \otimes x_i(k - 1).$$

Вводя следующие вектора:

$$\mathbf{a}(k) = \begin{pmatrix} a_1(k) \\ \vdots \\ a_n(k) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix},$$

и диагональную матрицу

$$\mathcal{T}_k = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & \tau_{nk} \end{pmatrix}$$

можно переписать последнее уравнение в векторной форме

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{T}_k \otimes \mathbf{a}(k) \oplus \mathcal{T}_k \otimes \mathbf{x}(k - 1). \quad (2.1)$$

## 2.2 Модели сетей с операциями синхронизации

Далее предполагается, что процессы обслуживания требований в узлах сети удовлетворяют некоторым ограничениям по синхронизации (см., например, [1, 57]). Механизмы синхронизации реализуются при помощи вспомогательных операций "объединения"(join) и "разъединения"(fork), которые выполняются в узлах соответственно до и после обслуживания требования. Выполнение операции "объединения" в узле  $i$  состоит в том, что требование не присоединяется к очереди до тех пор, пока в узел не поступит по одному требованию из каждого узла  $j \in \mathbf{P}(i)$ . Указанные требования объединяются в одно, которое затем присоединяется к очереди требований, ожидающих обслуживания в узле  $i$ .

Операция "разъединения" в узле  $i$  выполняется всякий раз, когда завершается обслуживание очередного требования. При этом требование заменяется на новые требования, количество которых равно числу узлов множества  $\mathbf{S}(i)$ . Затем новые требования одновременно покидают узел  $i$  и направляются по одному в каждый из узлов  $j \in \mathbf{S}(i)$ . Предполагается, что операции "объединения" и "разъединения", а также перемещение требований в сети от узла к узлу осуществляются мгновенно.

Сохраняются обозначения и условия описанные выше ( $\tau_{ik}$  и  $x_i(k)$ ) есть соответственно продолжительность и момент времени завершения обслуживания  $k$ -го требования в узле  $i$ , причем  $\tau_{ik}$  – заданные неотрицательные случайные величины, где  $E[\tau_{ik}] < \infty$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , и  $k = 1, 2, \dots$ ). Сеть начинает функционировать в нулевой момент времени,  $x_i(0) = 0$  и  $x_i(k) = \varepsilon$  для всех  $k < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Отсюда, с учетом особенностей ограничений по синхронизации, время прихода  $k$ -ого требования в очередь  $i$ -ого узла сети можно представить как

$$a_i(k) = \begin{cases} \bigoplus_{j \in \mathbf{P}(i)} x_j(k - r_i), & \text{если } \mathbf{P}(i) \neq \emptyset, \\ \varepsilon, & \text{если } \mathbf{P}(i) = \emptyset. \end{cases}$$

Полагая  $M = \max\{r_i \mid r_i < \infty, i = 1, \dots, n\}$ , можно записать

$$a_i(k) = \bigoplus_{m=0}^M \bigoplus_{j=1}^n g_{ji}^m \otimes x_j(k - m),$$

где  $g_{ij}^m$  определяется следующими условиями:

$$g_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in \mathbf{P}(j) \text{ и } m = r_j, \\ \varepsilon, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Введем матрицу  $G_m = (g_{ij}^m)$  для каждого  $m = 0, 1, \dots, M$ , которая представляет собой матрицу смежности графа  $\mathcal{G}_m = (\mathbf{N}, \mathbf{A}_m)$ , где  $\mathbf{A}_m = \{(i, j) \mid i \in \mathbf{P}(j), r_j = m\}$ .

С использованием матриц  $G_m$  получим

$$\mathbf{a}(k) = \bigoplus_{m=0}^M G_m^T \otimes \mathbf{x}(k - m),$$

где  $G_m^T$  обозначает матрицу, транспонированную по отношению к  $G_m$ .

Подставляя выражение для  $\mathbf{a}(k)$  в уравнение (2.1), приходим к следующему уравнению

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{T}_k \otimes G_0^T \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \mathcal{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \mathcal{T}_k \otimes \bigoplus_{m=1}^M G_m^T \otimes \mathbf{x}(k-m).$$

Докажем следующее утверждение (см., например, [22, 57]).

**Теорема 1** Пусть в рассматриваемой модели сети граф, соответствующий матрице  $G_0$ , является ациклическим. Тогда уравнение (2.2) может быть решено относительно  $\mathbf{x}(k)$  в явном виде:

$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{m=1}^M A_m(k) \otimes \mathbf{x}(k-m), \quad (2.2)$$

при этом матрицы  $A_m$  определяются как

$$\begin{aligned} A_1(k) &= (E \oplus \mathcal{T}_k \otimes G_0^T)^{\otimes r} \otimes \mathcal{T}_k \otimes (E \oplus G_1^T), \\ A_m(k) &= (E \oplus \mathcal{T}_k \otimes G_0^T)^{\otimes r} \otimes \mathcal{T}_k \otimes G_m^T, \\ m &= 2, \dots, M, \end{aligned}$$

где  $r$  – длина наибольшего пути в рассматриваемом графе.

**Доказательство.** Так как матрица  $\mathcal{T}_k$  – диагональная, то граф, соответствующий матрице  $\mathcal{T}_k \otimes G_0^T$  также является ациклическим (элементы, равные  $\varepsilon$  в  $G_0^T$  также равны  $\varepsilon$  в матрице  $\mathcal{T}_k \otimes G_0^T$ ). Тогда можем применить лемму 1 с матрицей

$$A = \mathcal{T}_k \otimes G_0^T$$

и вектором

$$\mathbf{b} = \mathcal{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \mathcal{T}_k \otimes \bigoplus_{m=1}^M G_m^T \otimes \mathbf{x}(k-m),$$

откуда получаем

$$\mathbf{x}(k) = (E \oplus A)^{\otimes r} \otimes \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned}
&= (E \oplus \mathcal{T}_k \otimes G_0^T)^{\otimes r} \otimes \left( \mathcal{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \mathcal{T}_k \otimes \bigoplus_{m=1}^M G_m^T \otimes \mathbf{x}(k-m) \right) \\
&= (E \oplus \mathcal{T}_k \otimes G_0^T)^{\otimes r} \otimes \left( (\mathcal{T}_k \oplus G_1^T) \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \mathcal{T}_k \otimes \bigoplus_{m=2}^M G_m^T \otimes \mathbf{x}(k-m) \right) \\
&= \bigoplus_{m=1}^M A_m(k) \otimes \mathbf{x}(k-m).
\end{aligned}$$

■

### Пример 3

Как пример рассмотрим модель, изображенную на рис.5 (в фигурных скобках указано количество требований в узлах на начальный момент времени).

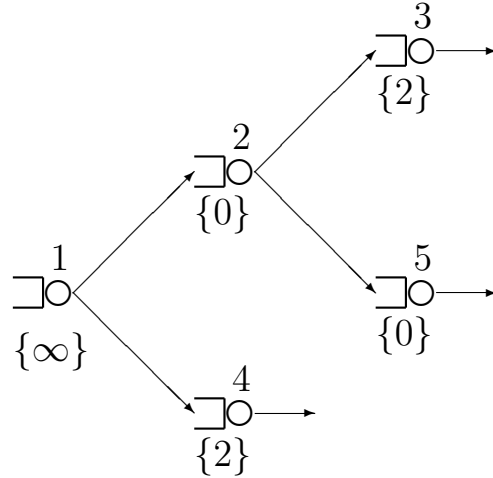


Рис.5.

Неявное уравнение (2.2) для этой модели запишется в следующем виде

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{T}_k \otimes (G_0^T \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus \otimes G_2^T \otimes \mathbf{x}(k-2)),$$

где

$$G_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Отсюда данное уравнение может быть решено относительно  $\mathbf{x}(k)$  в явном виде:

$$\mathbf{x}(k) = A_1(k) \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus A_2(k) \otimes \mathbf{x}(k-2),$$

где первая матрица есть

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k \otimes \tau_{2k}} & \tau_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_{3k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{4k} & \varepsilon \\ \tau_{1k \otimes \tau_{2k} \otimes \tau_{5k}} & \tau_{2k \otimes \tau_{5k}} & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{5k} \end{pmatrix},$$

а вторая матрица имеет следующий вид:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k \otimes \tau_{2k}} & \tau_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

## 2.3 Частный класс сетей с операциями синхронизации

Рассмотрим сеть, аналогичную представленной выше, но с условием, что в начальный момент времени все обслуживающие устройства сети свободны, очередь требований в каждом узле-источнике имеет бесконечную длину, а очереди всех прочих узлов не содержат требований (см., например, [22, 20]).

Тогда, из условия ацикличности графа сети и по лемме 1, динамика сети может быть представлена при помощи уравнения (2.2) и примет следующий вид:

$$\mathbf{x}(k) = A(k) \otimes \mathbf{x}(k-1), \quad (2.3)$$

с матрицей

$$A(k) = (E \oplus \mathcal{T}_k \otimes G^T)^{\otimes r} \otimes \mathcal{T}_k, \quad (2.4)$$

где  $G = (g_{ij})$  – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$g_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \in \mathbf{P}(j), \\ \varepsilon, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а  $r$  – длина наибольшего пути в графе сети  $\mathcal{G}$ .

#### Пример 4

В качестве примера рассмотрим сеть с  $n = 4$  узлами, представленную вместе с соответствующей матрицей  $G$  на рис. 6 (на рисунке не указывается количество требований в узлах в начальный момент времени, так как полагается, что изначально в узле-источнике содержится бесконечный поток требований, а в остальных узлах требования отсутствуют).

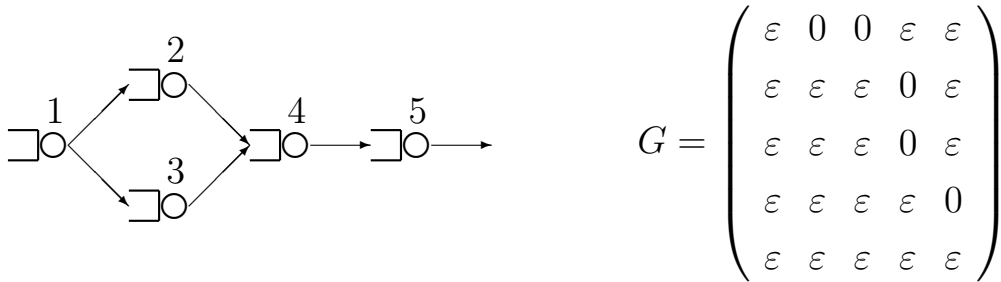


Рис.6.

В силу того, что для графа сети длина наибольшего пути  $r = 3$ , в уравнении (2.3):

$$\mathbf{x}(k) = (E \oplus \mathcal{T}_k \otimes G^T)^{\otimes 3} \otimes \mathcal{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1)$$

матрица (2.4) принимает вид

$$A(k) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{2k} & \mathcal{T}_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{3k} & \varepsilon & \mathcal{T}_{3k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes (\mathcal{T}_{2k} \oplus \mathcal{T}_{3k}) \otimes \mathcal{T}_{4k} & \mathcal{T}_{2k} \otimes \mathcal{T}_{4k} & \mathcal{T}_{3k} \otimes \mathcal{T}_{4k} & \mathcal{T}_{4k} & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes (\mathcal{T}_{2k} \oplus \mathcal{T}_{3k}) \otimes \mathcal{T}_{4k} \otimes \mathcal{T}_{5k} & \mathcal{T}_{2k} \otimes \mathcal{T}_{4k} \otimes \mathcal{T}_{5k} & \mathcal{T}_{3k} \otimes \mathcal{T}_{4k} \otimes \mathcal{T}_{5k} & \mathcal{T}_{4k} \otimes \mathcal{T}_{5k} & \mathcal{T}_{5k} \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Среднее время рабочего цикла сети из частного класса

Итак, мы имеем динамическое уравнение для вектора завершения обслуживания  $k$ -ых требований в узлах сети. Воспользуемся оператором, свойства которого будут рассмотрены в следующей главе:

$$\text{для } \forall A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n} \quad \|A\| = \bigoplus_{ij} a_{ij}.$$

Положим время окончания  $k$ -ого цикла сети как  $\|\mathbf{x}(k)\|$ . Иными словами,  $k$ -ый рабочий цикл сети завершается после окончания обслуживания  $k$ -ых требований во всех узлах данной сети. Теперь можно сформулировать задачу о нахождении величины  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|\mathbf{x}(k)\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \|\mathbf{x}(k)\|$ , представляющей собой среднее время рабочего цикла. Из (2.3) имеем для частного класса сети с операциями синхронизации:

$$\sqrt[k]{\|\mathbf{x}(k)\|} = \sqrt[k]{\|A(k) \otimes \mathbf{x}(k-1)\|} = \sqrt[k]{\|A(k) \otimes \dots \otimes A(1) \otimes \mathbf{x}(0)\|},$$

а введя обозначение

$$A_k = A(k) \otimes \dots \otimes A(1), \quad (2.5)$$

получим

$$\sqrt[k]{\|\mathbf{x}(k)\|} = \sqrt[k]{\|A_k\|}. \quad (2.6)$$

Действительно, (2.6) следует из того, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(k)\| &= \bigoplus_i \mathbf{x}_i(k) = \bigoplus_i \bigoplus_j \{A_k\}_{ij} \otimes \mathbf{x}_j(0) \\ &= \bigoplus_i \bigoplus_j \{A_k\}_{ij} \otimes 0 = \bigoplus_{ij} \{A_k\}_{ij} = \|A_k\|. \end{aligned}$$

Встает задача о нахождении или оценке величины

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|\mathbf{x}(k)\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A_k\|}. \quad (2.7)$$

Ранее было доказано в [47], что среднее время рабочего цикла можно оценить следующим образом:

$$\|E[\mathcal{T}]\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|\mathbf{x}(k)\|} \leq E\|\mathcal{T}\|, \quad (2.8)$$



а в работе [65] получено точное значение этой величины для линейных сетей (рис.7), равное нижней оценке в (2.8).

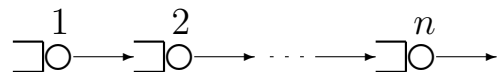


Рис.7.

Итак, для среднего времени рабочего цикла линейной сети из рассматриваемого класса справедливо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|\mathbf{x}(k)\|} = \|E[\mathcal{T}]\|. \quad (2.9)$$

Этот результат – один из примеров анализа динамических характеристик сетей с очередями из описанного выше класса. Далее будет показано, что это не единственное применение аппарата данной идемпотентной алгебры при исследовании динамики сетей с очередями.

## Глава 3

# Матричные операторы в ( $\max, +$ )-алгебре и их свойства

### 3.1 Определение четырех операторов

Мы рассмотрим четыре матричных оператора, которые понадобятся нам в дальнейшем (см., например, [52, 53, 63, 64]). Для любой матрицы  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times n$ :

$$\mu_1(A) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } \min_i \bigoplus_j a_{ij} = \varepsilon, \\ \min_{ij} \{a_{ij} \mid a_{ij} \neq \varepsilon\}, & \text{иначе;} \end{cases}$$
$$\mu_2(A) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } \min_j \bigoplus_i a_{ij} = \varepsilon, \\ \min_{ij} \{a_{ij} \mid a_{ij} \neq \varepsilon\}, & \text{иначе;} \end{cases}$$
$$\mu(A) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } \min_i \left\{ \bigoplus_j a_{ij}, \bigoplus_j a_{ji} \right\} = \varepsilon, \\ \min_{ij} \{a_{ij} \mid a_{ij} \neq \varepsilon\}, & \text{иначе;} \end{cases}$$
$$\|A\| = \bigoplus_{ij} a_{ij}.$$

Заметим, что из приведенных выше определений следует, что для любой матрицы  $A = (a_{ij})$  размера  $m \times n$  оператор  $\mu_1(A) = \varepsilon$  тогда и только тогда, когда в матрице  $A$  существует по крайней мере одна строка, все элементы которой равны  $\varepsilon$ ; оператор  $\mu_2(A) = \varepsilon$  тогда и только тогда,

когда в матрице  $A$  существует по крайней мере один столбец, все элементы которого равны  $\varepsilon$ ; оператор  $\mu(A) = \varepsilon$  тогда и только тогда, когда в матрице  $A$  существует по крайней мере один столбец или строка, все элементы которых равны  $\varepsilon$ ; оператор  $\|A\| = \varepsilon$  тогда и только тогда, когда в матрице  $A$  все элементы равны  $\varepsilon$  (то есть  $A = \mathcal{E}$ ). Оператор  $\mu$  можно представить также следующим образом:

$$\mu(A) = \min \{ \mu_1(A), \mu_2(A) \} \text{ или } \mu(A) = \otimes^2 \sqrt{\mu_1(A) \otimes \mu_2(A)},$$

где  $\otimes^k \sqrt{\phantom{x}}$  есть корень  $k$ -ой степени в  $(\max, +)$ -алгебре, что соответствует обычной операции деления на  $k$  подкоренного выражения.

### Пример 5

В качестве примера рассмотрим матрицы на рис.8, рис.9 и рис.10. Все элементы второго столбца в матрице на рис.9 равны  $\varepsilon$  из чего следует, что  $\mu(A) = \mu_2(A) = \varepsilon$ . На рис.10 все элементы третьей строки и второго столбца матрицы  $A$  равны  $\varepsilon$ , из чего следует, что  $\mu(A) = \mu_1(A) = \mu_2(A) = \varepsilon$ .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \varepsilon & 7 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & 2 \\ 2 & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 1 & 6 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1(A) &= a_{41} = 1, \\ \mu_2(A) &= a_{41} = 1, \\ \mu(A) &= a_{41} = 1. \\ \|A\| &= a_{14} = 7, \end{aligned}$$

Рис.8.

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 4 & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 9 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1(A) &= a_{54} = 0, \\ \mu_2(A) &= \varepsilon, \\ \mu(A) &= \varepsilon. \\ \|A\| &= a_{23} = 9, \end{aligned}$$

Рис.9.

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 4 & 8 \\ 5 & \varepsilon & 3 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1(A) &= \varepsilon, \\ \mu_2(A) &= \varepsilon, \\ \mu(A) &= \varepsilon. \\ \|A\| &= a_{14} = 8, \end{aligned}$$

Рис.10.

## 3.2 Обычные свойства операторов в $(\max, +)$ -алгебре

Далее укажем некоторые свойства, связанные с операторами, определенными выше. Заметим, что большинство свойств для операторов  $\mu_1$  и  $\mu_2$  совпадают, поэтому в дальнейшем мы будем упоминать отличия в свойствах (или в рассуждениях при доказательстве этих свойств) для второго из этих операторов лишь тогда, когда они существуют. Так для любой матрицы  $A$  справедливо

$$1) \quad \|A\| \geq \mu_1(A) \geq \mu(A).$$

Действительно,  $\|A\| = \varepsilon$  тогда и только тогда, когда  $A = \mathcal{E}$ , а иначе значение оператора равно максимальному элементу матрицы.  $\mu(\mathcal{E}) = \mu_1(\mathcal{E}) = \varepsilon$ , а иначе значение этих операторов равно  $\varepsilon$  или минимальному элементу матрицы, отличному от  $\varepsilon$ . Условие, при котором  $\mu_1(A) = \varepsilon$ , является частью условия при котором  $\mu(A) = \varepsilon$ , из чего следует  $\mu_1(A) \geq \mu(A)$ .

Для любых двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  размера  $n \times n$  справедливо

$$2) \quad \|A\| \leq \|A \oplus B\| \leq \|A\| \oplus \|B\|.$$

Это следует из того, что для любых  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$a_{ij} \leq a_{ij} \oplus b_{ij} \leq \bigoplus_{ij} a_{ij} \oplus b_{ij} = \|A \oplus B\|$$

и того, что

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \leq \bigoplus_{ij} a_{ij} \oplus \bigoplus_{ij} b_{ij} = \|A\| \oplus \|B\|.$$

Для любых двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$ , размерность которых соответственно  $l \times n$  и  $n \times m$ , справедливо

$$3) \quad \|A \otimes B\| \leq \|A\| \otimes \|B\|.$$

Третье свойство следует из того, что для любого элемента матрицы, являющейся результатом произведения в  $(\max, +)$ -алгебре матриц  $A$  и  $B$ , справедливо

$$\{A \otimes B\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} \leq \bigoplus_{ij} a_{ij} \otimes \bigoplus_{ij} b_{ij} = \|A\| \otimes \|B\|.$$

В дополнение к вышесказанному выполняется

$$4) \quad \|A \otimes B\| \geq \|A\| \otimes \mu_1(B) \geq \|A\| \otimes \mu(B).$$

Действительно, первое неравенство в свойстве 4 (второе неравенство будет следовать из рассуждений приведенных выше для свойства 1) доказывается, к примеру, следующим образом. Пусть  $a_{i_0 j_0} = \|A\|$ . Тогда

$$\|A \otimes B\| = \bigoplus_{ijk} a_{ik} \otimes b_{kj} \geq \bigoplus_j a_{i_0 j_0} \otimes b_{j_0 j} = \|A\| \otimes \bigoplus_j b_{j_0 j} \geq \|A\| \otimes \mu_1(B).$$

Последний переход возможен в следствии того, что если  $b_{j_0 j} = \varepsilon$  для всех  $j = 1, \dots, n$ , то  $\mu_1(B) = \varepsilon$  по определению этого оператора (так как в матрице существует строка, все элементы которой равны  $\varepsilon$ ). Для оператора  $\mu_2$  свойство 4 представляется следующим образом:

$$\|A \otimes B\| \geq \mu_2(A) \otimes \|B\| \geq \mu(A) \otimes \|B\|,$$

для которого доказательство с предположением, что  $b_{i_0 j_0} = \|B\|$ , выглядит следующим образом:

$$\|A \otimes B\| = \bigoplus_{ijk} a_{ik} \otimes b_{kj} \geq \bigoplus_i a_{ii_0} \otimes b_{i_0 j_0} = \bigoplus_i a_{ii_0} \otimes \|B\| \geq \mu_2(A) \otimes \|B\|.$$

Последний переход возможен в следствии того, что если  $a_{ii_0} = \varepsilon$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , то  $\mu_2(A) = \varepsilon$  по определению этого оператора (так как в матрице существует столбец, все элементы которого равны  $\varepsilon$ ). Из свойства 4 напрямую следует:

$$5) \quad \|A^k\| \geq \mu_1(A) \otimes \|A^{k-1}\| \geq \mu(A) \otimes \|A^{k-1}\|.$$

## Пример 6

В качестве примера рассмотрим матрицы  $A$  и  $B$  изображенные на рис.11.

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 4 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & 4 & 3 & 8 \\ \varepsilon & \varepsilon & 3 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & 2 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \end{pmatrix}.$$

Рис.11.

Для этих матриц свойства, представленные выше, будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \|A\| &= 7 \geq \mu_1(A) = 2 \geq \mu(A) = \varepsilon, \\ \|A\| &= 7 \leq \|A \oplus B\| = 8 \leq \|A\| \oplus \|B\| = 17, \\ \|A \otimes B\| &= 14 \leq \|A\| \otimes \|B\| = 15, \\ \|A \otimes B\| &= 14 \geq \|A\| \otimes \mu_1(B) = 8 \geq \|A\| \otimes \mu(B) = \varepsilon, \\ \|A^3\| &= 18 \geq \mu_1(A) \otimes \|A^2\| = \mu(A) \otimes \|A^2\| = 14, \end{aligned}$$

где

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 7 & 6 & 9 \\ \varepsilon & 10 & 10 & 7 & 9 \\ 13 & \varepsilon & 7 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & 12 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & 7 & 7 & 7 & 12 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 14 & 13 & 15 \\ 16 & 17 & 13 & 12 & 15 \\ \varepsilon & 17 & 17 & 14 & 16 \\ 18 & \varepsilon & 15 & 14 & \varepsilon \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & 9 & 6 & 9 \\ 8 & \varepsilon & 10 & 9 & 14 \\ \varepsilon & \varepsilon & 10 & 9 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & 7 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Вероятностные свойства операторов в $(\max, +)$ -алгебре

Пусть элементы матрицы  $A = (a_{ij})$  – представляют собой некоторые случайные величины. Обозначим через  $E[A]$  матрицу, полученную из  $A$  путем замены ее элементов на их математические ожидания при условии, что  $E\varepsilon = \varepsilon$ . Будем в дальнейшем полагать, что элементы матриц могут принимать либо неотрицательные значения, либо быть равны  $\varepsilon$ .

Тогда, наряду с обычными свойствами матричных операторов, приведенными выше, укажем ряд вероятностных свойств, часть из которых понадобится нам в дальнейшем. Простейшие из них следуют из свойств указанных выше операторов и математического ожидания. Сперва рассмотрим свойства, на которые мы будем опираться в ряде дальнейших доказательств.

**Лемма 2** (см., например, [2]) *Если  $E\xi$  существует и  $g(x)$  – выпуклая вниз функция, то*

$$g(E\xi) \leq Eg(\xi).$$

**Следствие 1** *Для любых  $\xi$  и  $\eta$  таких, что существуют  $E\xi$  и  $E\eta$ , выполняется*

$$E[\xi \oplus \eta] \geq E\xi \oplus E\eta.$$

*а также*

$$E[\min(\xi, \eta)] \leq \min(E\xi, E\eta).$$

**Доказательство.** Т.к.  $g(x) = |x|$  – выпуклая вниз, то

$$\begin{aligned} E[\xi \oplus \eta] &= E \max(\xi, \eta) = E \left[ \frac{1}{2}(\xi + \eta + |\xi - \eta|) \right] \\ &= \frac{1}{2}(E\xi + E\eta + E|\xi - \eta|) \geq \frac{1}{2}(E\xi + E\eta + |E\xi - E\eta|) \\ &= \max(E\xi, E\eta) = E\xi \oplus E\eta. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} E \min(\xi, \eta) &= E \left[ \frac{1}{2}(\xi + \eta - |\xi - \eta|) \right] = \frac{1}{2}(E\xi + E\eta - E|\xi - \eta|) \\ &\leq \frac{1}{2}(E\xi + E\eta - |E\xi - E\eta|) = \min(E\xi, E\eta). \end{aligned}$$

Заметим, что из сделанных выше предположений о том, что  $E\varepsilon = \varepsilon$ , следует, что  $\xi$  и  $\eta$  могут быть равны  $\varepsilon$ . При этом, мы получаем равенство в утверждении данного следствия. ■

**Следствие 2** Для любых  $\xi_1, \dots, \xi_n$  таких, что существуют  $E\xi_i$  для любого  $i = 1, \dots, n$ , выполняется

$$E \left[ \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \right] \geq \bigoplus_{i=1}^n E\xi_i,$$

а также

$$E \left[ \min_{i=1}^n \xi_i \right] \leq \min_{i=1}^n E\xi_i.$$

**Доказательство.** Первая часть утверждения следствия следует из предыдущего следствия теоремы 2, так как мы можем сделать следующее преобразование:

$$E \left[ \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \right] = E \left[ \xi_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \xi_i \right] \geq E \left[ \bigoplus_{i=1}^{n-1} \xi_i \right] \oplus E\xi_n \geq \dots \geq \bigoplus_{i=1}^n E\xi_i.$$

Вторая часть утверждения следствия следует также из предыдущего следствия теоремы 2, так как мы можем сделать следующее преобразование:

$$E \left[ \min_{i=1}^n \xi_i \right] = E \left[ \xi_n \oplus \min_{i=1}^{n-1} \xi_i \right] \leq E \left[ \min_{i=1}^{n-1} \xi_i \right] \oplus E\xi_n \leq \dots \leq \min_{i=1}^n E\xi_i. \quad \blacksquare$$

**Лемма 3** (см., например, [2]) Пусть  $\xi$  и  $\eta$  – независимые случайные величины,  $g(x, y)$  – борелевская функция. Тогда если  $g(x, y) \geq 0$  или  $Eg(x, y)$  конечно, то

$$Eg(\xi, \eta) = E[Eg(x, \eta)|x = \xi].$$



**Следствие 3** Для любых  $\xi$  и  $\eta$  таких, что существуют  $E\xi$  и  $E\eta$ , выполняется

$$E[\xi \oplus \eta] \geq E[\xi \oplus E\eta].$$

**Доказательство.** Положим  $g(x, y) = \max(x, y)$ . Тогда

$$\begin{aligned} E[\xi \oplus \eta] &= E \max(\xi, \eta) = E[E \max(x, \eta) | x = \xi] \\ &\geq E[\max(x, E\eta) | x = \xi] = E \max(\xi, E\eta) = E[\xi \oplus E\eta]. \end{aligned}$$

Заметим, что из сделанных выше предположений о том, что  $E\varepsilon = \varepsilon$ , следует, что  $\xi$  и  $\eta$  могут быть равны  $\varepsilon$ . При этом, мы получаем равенство в утверждении данного следствия.  $\blacksquare$

**Следствие 4** Для любых  $\xi_1, \dots, \xi_n$  таких, что существуют  $E\xi_i$  (для любого  $i = 1, \dots, n$ ), и любых  $\eta_1, \dots, \eta_m$  таких, что существуют  $E\eta_i$  (для любого  $i = 1, \dots, m$ ), выполняется

$$E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^m \eta_i \right) \right] \geq E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^m E\eta_i \right) \right].$$

**Доказательство.** Воспользуемся рассуждениями из предыдущего свойства. Тогда

$$\begin{aligned} &E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^m \eta_i \right) \right] \\ &= E \left[ E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^n x_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{m-1} y_i \right) \oplus \eta_m \right] \middle| \begin{array}{l} x_i = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n \\ y_i = \eta_i, \quad i = 1, \dots, (m-1) \end{array} \right] \right] \\ &\geq E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^n x_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{m-1} y_i \right) \oplus E\eta_m \middle| \begin{array}{l} x_i = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n \\ y_i = \eta_i, \quad i = 1, \dots, (m-1) \end{array} \right] \right] \\ &= E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{m-1} \eta_i \right) \oplus E\eta_m \right] \geq \dots \geq E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^m E\eta_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Докажем также еще два следствия из леммы 3.  $\blacksquare$

**Следствие 5** Для любых  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  таких, что существуют  $E\xi$ ,  $E\eta$  и  $E\zeta$ , выполняется

$$E[\xi \oplus \eta \otimes \zeta] \geq E[\xi \oplus \eta \otimes E\zeta].$$

**Доказательство.** Положим  $g(x, y + z) = \max(x, y + z)$ . Тогда

$$\begin{aligned} E[\xi \oplus \eta \otimes \zeta] &= E \max(\xi, \eta \otimes \zeta) = E[E \max(x, y + \zeta) | x = \xi, y = \eta] \\ &\geq E[\max(x, E[y + \zeta]) | x = \xi, y = \eta] = E[\max(x, y + E\zeta) | x = \xi, y = \eta] \\ &= E \max(\xi, \eta + E\zeta) = E[\xi \oplus \eta \oplus E\zeta]. \end{aligned}$$

Заметим, что из сделанных выше предположений о том, что  $E\varepsilon = \varepsilon$ , следует, что  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  могут быть равны  $\varepsilon$ . ■

**Следствие 6** Для любых  $\xi_1, \dots, \xi_n$  таких, что существуют  $E\xi_i$  (для любого  $i = 1, \dots, n$ ), и любых  $\eta_1, \dots, \eta_n$  таких, что существуют  $E\eta_i$  (для любого  $i = 1, \dots, n$ ), выполняется

$$E \left[ \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \right] \geq E \left[ \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \otimes E\eta_i \right].$$

**Доказательство.** Воспользуемся следствием 5.

$$\begin{aligned} E \left[ \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i \right] &= E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^{n-1} \xi_i \otimes \eta_i \right) \oplus \xi_n \otimes \eta_n \right] \\ &\geq E \left[ \left( \bigoplus_{i=1}^{n-1} \xi_i \otimes \eta_i \right) \oplus (\xi_n \otimes E\eta_n) \right] \geq \dots \geq E \left[ \bigoplus_{i=1}^n \xi_i \otimes E\eta_i \right]. \end{aligned}$$

■

Теперь рассмотрим и докажем вероятностные свойства связанные с нашими операторами. Сначала рассмотрим самые простые из них. Так для матрицы произвольной размерности справедливо

$$1) \quad E\|A\| \geq \|EA\|.$$

Действительно, данное свойство следует непосредственно из первой части следствия 2, так как, по определению оператора  $\|\cdot\|$ , последний

представляет из себя максимум элементов матрицы, на которую действует оператор.

Следующее свойство справедливо также для произвольной матрицы:

$$2) \quad E[\mu_1(A)] \geq E[\mu(A)],$$

что напрямую следует из обычных свойств операторов, доказанных выше ( $\mu_1(A) \geq \mu(A)$ ). Аналогично,

$$3) \quad E[\mu_2(A)] \geq E[\mu(A)].$$

Сформулируем следующие свойства. Так для любой матрицы  $A$  справедливо:

$$4) \quad E[\mu_1(A)] \leq \mu_1(E[A]).$$

Для доказательства достаточно рассмотреть два случая когда  $\mu(A) = \varepsilon$  и  $\mu(A) \neq \varepsilon$ . Первый случай означает (определение оператора  $\mu_1$ ), что в матрице  $A$  имеется по крайней мере одна строка строка, все элементы которой равны  $\varepsilon$ , а так как  $E[\varepsilon] = \varepsilon$ , то это означает, что в матрице  $E[A]$  соответствующая строка состоит из элементов, которые равны  $\varepsilon$ . Отсюда имеем равенство  $E[\mu_1(A)] = \mu_1(E[A]) = \varepsilon$ . Если же  $\mu(A) \neq \varepsilon$ , то в данной матрице и матрице  $E[A]$  нет строк, элементы которых равны  $\varepsilon$ , и можно применить следствие 2:

$$E[\mu_1(A)] = E\left[\min_{ij}\{a_{ij} | a_{ij} \neq \varepsilon\}\right] \leq \min_{ij}\{E\{a_{ij} | a_{ij} \neq \varepsilon\}\} = \mu_1(E[A]).$$

Аналогично доказываются следующие два свойства:

$$5) \quad E[\mu_2(A)] \leq \mu_2(E[A]),$$

$$6) \quad E[\mu(A)] \leq \mu(E[A]),$$

где условие  $\mu_2 = \varepsilon$  означает, что в матрице  $A$  существует по крайней мере один столбец, все элементы которого равны  $\varepsilon$ , а условие  $\mu(A) = \varepsilon$  означает, что в матрице  $A$  существует по крайней мере один столбец или строка, все элементы которых равны  $\varepsilon$ .

Следующее свойство справедливо для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размера  $n \times m$ :

$$7) \quad E[A \oplus B] \geq E[A] \oplus E[B].$$

Действительно, для любых  $i = 1, \dots, n$  и  $j = 1, \dots, m$  по следствию 1 данное свойство доказывается следующим образом:

$$\{E[A \oplus B]\}_{ij} = E[a_{ij} \oplus b_{ij}] \geq Ea_{ij} \oplus Eb_{ij} = \{E[A] \oplus E[B]\}_{ij}.$$

Следующее свойство справедливо для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размера  $l \times n$  и  $n \times m$  соответственно:

$$8) \quad E[A \otimes B] \geq E[A] \otimes E[B],$$

что следует из следующего доказательства (используется следствие 2), где рассматривается произвольный элемент ( $i = 1, \dots, l$  и  $j = 1, \dots, m$ ) матрицы, которая равна математическому ожиданию произведения  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} \{E[A \otimes B]\}_{ij} &= E \left[ \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} \right] \geq \bigoplus_{k=1}^n E[a_{ik} \otimes b_{kj}] \\ &= \bigoplus_{k=1}^n Ea_{ik} \otimes Eb_{kj} = \{E[A] \otimes E[B]\}_{ij}. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим свойство, которое также будем использовать в дальнейших рассуждениях и доказательствах. Для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размера  $l \times n$  и  $n \times m$  соответственно:

$$9) \quad E\|A \otimes B\| \leq E\|A\| \otimes E\|B\|.$$

Справедливость этого утверждения доказывается, со ссылкой на следствие 2 следующим образом:

$$\begin{aligned} E\|A \otimes B\| &= E \left[ \bigoplus_{ijk} a_{ik} \otimes b_{kj} \right] \leq E \left[ \left( \bigoplus_{ik} a_{ik} \right) \otimes \left( \bigoplus_{kj} b_{kj} \right) \right] \\ &= E \left[ \bigoplus_{ik} a_{ik} \right] \otimes E \left[ \bigoplus_{kj} b_{kj} \right] = E\|A\| \otimes E\|B\|. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим оценки, которые имеют более сложный вид. Следующее свойство справедливо для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размера  $n \times m$ :

$$10) \quad E[A \oplus B] \geq E[A \oplus E[B]].$$

Для доказательства этого рассуждения воспользуемся следствием 3. Для любых  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$\{E[A \oplus B]\}_{ij} = E[a_{ij} \oplus b_{ij}] \geq E[a_{ij} \oplus Eb_{ij}] = \{E[A \oplus E[B]]\}_{ij}.$$

Следующее утверждение справедливо для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размера  $l \times n$  и  $n \times m$  соответственно:

$$11) \quad E[A \otimes B] \geq E[A \otimes E[B]].$$

Для доказательства этого рассуждения воспользуемся следствием 6. Для  $i = 1, \dots, n$  и  $j = 1, \dots, m$ :

$$\{E[A \otimes B]\}_{ij} = E \left[ \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} \right] \geq E \left[ \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes Eb_{kj} \right] = \{E[A \otimes E[B]]\}_{ij}.$$

Следующее свойство для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размера  $l \times n$  и  $n \times m$  соответственно:

$$12) \quad E\|A \otimes B\| \geq E\|A \otimes E[B]\|.$$

Оно доказывается также с помощью следствия 6. Для  $i = 1, \dots, n$  и  $j = 1, \dots, m$ :

$$E\|A \otimes B\| = E \left[ \bigoplus_{ijk} a_{ik} \otimes b_{kj} \right] \geq E \left[ \bigoplus_{ijk} a_{ik} \otimes Eb_{kj} \right] = E\|A \otimes E[B]\|.$$

Рассмотрим следующее свойство, которое справедливо для матриц  $A$  и  $B$  размера  $l \times n$  и  $n \times m$  соответственно:

$$13) \quad E\|A \otimes B\| \geq E\|A\| \otimes E[\mu_1(B)].$$

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством  $\|A \otimes B\| \geq \|A\| \otimes \mu_1(B)$ , которое было доказано выше (обычные свойства операторов). Аналогично доказывается следующее утверждение:

$$14) \quad E\|A \otimes B\| \geq E\|A\| \otimes E[\mu_2(B)].$$

Также доказывается и утверждение

$$15) \quad E\|A \otimes B\| \geq E\|A\| \otimes E[\mu(B)].$$

Оба последних утверждения верны для любых двух матриц  $A$  и  $B$  размера  $l \times n$  и  $n \times t$  соответственно.

В дальнейшем мы рассмотрим еще ряд свойств, которые появятся в процессе рассмотрения вопросов связанных с нахождением и оцениванием динамических характеристик ряда сетей.

# Глава 4

## Стохастические сети

### 4.1 Определение стохастических сетей и основные свойства, связанные с ними

Пусть в алгебраической модели сети, представленной выше, для каждого узла сети  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) времена обслуживания  $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots$ , являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Ясно, что тогда случайные матрицы  $\mathcal{T}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , будут также независимы и одинаково распределены.

Для каждого цикла обслуживания  $k$  граф сети и, соответственно, его  $(0 - \varepsilon)$ -матрица смежности, которую обозначим  $\Gamma_k$ , будем считать случайными. Предполагается, что случайные матрицы  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ , независимы и одинаково распределены. Кроме того, последовательности матриц  $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_k\}$  и  $\Gamma = \{\Gamma_k\}$  также являются взаимно независимыми.

Будем рассматривать эволюцию сети как последовательность циклов обслуживания. Первый цикл начинается в нулевой момент времени и продолжается до тех пор, пока во всех узлах сети не будет обслужено по одному требованию. Второй цикл завершится тогда, когда во всех узлах сети будет обслужено по два требования, и т.д.

Для любого узла  $i \in \mathbf{N}$  определим также (по аналогии с  $\mathbf{P}(i)$  и  $\mathbf{S}(i)$ , введенными выше) множества узлов

$$\mathbf{P}_k(i) = \{j \mid (j, i) \in \mathbf{A}(\mathbf{k})\}, \quad \mathbf{S}_k(i) = \{j \mid (i, j) \in \mathbf{A}(\mathbf{k})\},$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  – множество дуг графа для  $k$ -го рабочего цикла, определяю-

ших маршруты движения требований. Каждый узел  $i$ , для которого выполняется  $\mathbf{P}_k(i) = \emptyset$ , рассматривается как источник бесконечного потока требований для данного цикла, поступающих в сеть.  $k$ -ые требования выводятся из сети после обслуживания в узлах  $i$ , для которых  $\mathbf{S}_k(i) = \emptyset$ . Очередь требований в каждом узле-источнике имеет бесконечную длину, а очереди всех прочих узлов  $i$  в начале каждого рабочего цикла пусты.

Запишем неявное стохастическое уравнение для сети:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{T}_k \otimes \Gamma_k^T \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \mathcal{T}_k \otimes \mathbf{x}(k-1),$$

где  $\mathbf{x}$  –  $n$ -вектор моментов времени завершения обслуживания  $k$ -го требования в узлах сети,  $\mathcal{T}_k = \text{diag}(\tau_{1k}, \dots, \tau_{nk})$  – случайная матрица продолжительностей обслуживания  $k$ -ых требований в узлах сети,  $\Gamma_k$  – случайная  $(0 - \varepsilon)$ -матрица смежности маршрутного графа сети для  $k$ -го цикла обслуживания.

Выше (Теорема 1) было показано, что при условии ацикличности матрицы смежности сетевого графа неявное уравнение может быть решено относительно вектора  $\mathbf{x}(k)$ . Далее всегда будем предполагать, что для всех возможных графов сети условие ацикличности их матриц смежности соблюдается. Таким образом, от неявного уравнения можно перейти к уравнению:

$$\mathbf{x}(k) = A(k) \otimes \mathbf{x}(k-1)$$

с матрицей  $A(k)$ , которая определяется как

$$A(k) = A(\mathcal{T}_k, \Gamma_k) = (E \oplus \mathcal{T}_k \otimes \Gamma_k^T)^{\otimes \eta_k} \otimes \mathcal{T}_k,$$

где  $\eta_k$  есть максимальная длина пути в сетевом графе, соответствующем матрице  $\Gamma_k$ . С учетом того, что на начальный момент времени  $\mathbf{x}(0) = (0, \dots, 0)^T$ , время завершения  $k$ -го цикла может быть определено также как и ранее в главе 2.4:

$$\|\mathbf{x}(k)\| = \|A_k\|, \quad A_k = A(k) \otimes \dots \otimes A(1).$$

## Пример 7



В качестве примера рассмотрим стохастическую модель, где граф сети в начале каждого рабочего цикла может принимать два состояния с вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  ( $p_1 + p_2 = 1$ ) соответственно. Модели и матрицы смежности сетевого графа для этих состояний представлены на рис.12 и рис.13.

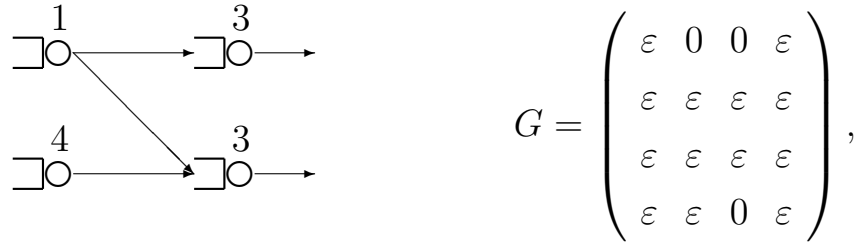


Рис.12.

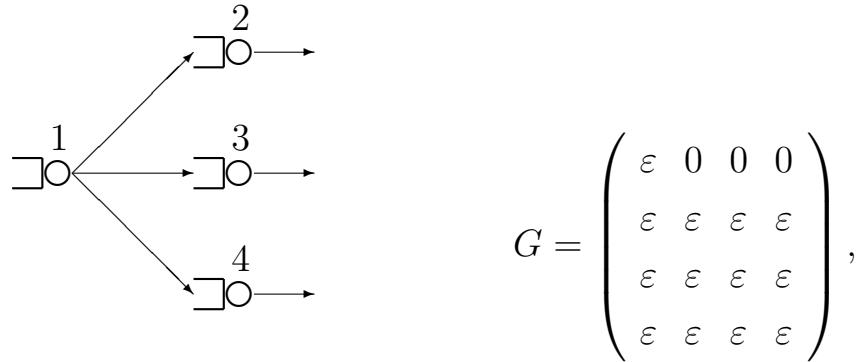


Рис.13.

Для первой модели переходная матрица  $k$ -ого рабочего цикла будет выглядеть следующим образом:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{2k} & \tau_{2k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{3k} & \varepsilon & \tau_{3k} & \tau_{4k} \otimes \tau_{3k} \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{4k} \end{pmatrix},$$

а для второй модели данная матрица будет выглядеть так:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{2k} & \tau_{2k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{3k} & \varepsilon & \tau_{3k} & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{4k} & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{4k} \end{pmatrix}.$$

Найдем, к примеру, чему может быть равно  $\|\mathbf{x}(2)\|$  для данной модели. Так как  $\|\mathbf{x}(2)\| = \|A_2\|$ , то ниже мы просто указываем все возможные значения матрицы  $A_2$  (вероятности их появления есть соответственно  $p_1^2$ ,  $p_1p_2$ ,  $p_2p_1$  и  $p_2^2$ ):

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \tau_{12} \otimes \tau_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{22} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{21}) & \tau_{22} \otimes \tau_{21} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{32} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{31}) & \varepsilon & \tau_{32} \otimes \tau_{31} & \tau_{32} \otimes \tau_{41} \otimes (\tau_{31} \oplus \tau_{42}) \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{42} \otimes \tau_{41} \end{pmatrix}; \\
& \begin{pmatrix} \tau_{12} \otimes \tau_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{22} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{21}) & \tau_{22} \otimes \tau_{21} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{32} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{31} \oplus \tau_{42} \otimes \tau_{41}) & \varepsilon & \tau_{32} \otimes \tau_{31} & \tau_{42} \otimes \tau_{32} \otimes \tau_{41} \\ \tau_{42} \otimes \tau_{11} \otimes \tau_{41} & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{42} \otimes \tau_{41} \end{pmatrix}; \\
& \begin{pmatrix} \tau_{12} \otimes \tau_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{22} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{21}) & \tau_{22} \otimes \tau_{21} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{32} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{31}) & \varepsilon & \tau_{32} \otimes \tau_{31} & \varepsilon \\ \tau_{42} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{41}) & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{42} \otimes \tau_{41} \end{pmatrix}; \\
& \begin{pmatrix} \tau_{12} \otimes \tau_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{22} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{21}) & \tau_{22} \otimes \tau_{21} & \varepsilon & \varepsilon \\ \tau_{32} \otimes \tau_{11} \otimes (\tau_{12} \oplus \tau_{31}) & \varepsilon & \tau_{32} \otimes \tau_{31} & \tau_{32} \otimes \tau_{41} \otimes \tau_{31} \\ \tau_{42} \otimes \tau_{12} \otimes \tau_{11} & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{42} \otimes \tau_{41} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

## 4.2 Среднее время работы стохастических сетей с отказами

Пусть существует вероятность возникновения условий, препятствующих выполнению очередного цикла и дальнейшей работе сети (вероятность отказа) (см., например, [22, 20]). Введем случайную величину  $\nu$  – номер последнего успешно завершённого цикла обслуживания, вслед за которым произошел отказ сети, и предположим, что  $E[\nu] < \infty$ . Тогда среднее

время работы сети до момента отказа определяется как

$$E\|A_\nu\| = E[E\|A_k\| | \nu = k] = \sum_{k=1}^{\infty} E\|A_k\| P\{\nu = k\}.$$

Будем предполагать, что для любого  $k$ , вероятность успешного завершения  $k$ -го цикла обслуживания не зависит от  $k$ . Обозначив эту вероятность через  $p$ , получим

$$E\|A_\nu\| = (1 - p) \sum_{k=1}^{\infty} E\|A_k\| p^k. \quad (4.1)$$

### 4.3 Оценивание среднего времени работы сети

Для построения оценок будем использовать следующие вспомогательные результаты. Сначала заметим, что для любого  $k$  выполняется

$$A(k) = \mathcal{T}_k \oplus (\mathcal{T}_k \otimes \Gamma_k^T) \otimes \mathcal{T}_k \oplus \cdots \oplus (\mathcal{T}_k \otimes \Gamma_k^T)^{\otimes \eta_k} \otimes \mathcal{T}_k \geq \mathcal{T}_k,$$

где  $\eta_k$  – максимальная длина пути в маршрутном графе, соответствующем  $\Gamma_k$ . Кроме того, для диагональных матриц  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$  справедливо очевидное тождество  $\mathcal{T}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_k = \mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_k$ . Также заметим, что для всех  $k = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathcal{T}_k) &\neq \varepsilon, \quad \mu_2(\mathcal{T}_k) \neq \varepsilon, \quad \mu(\mathcal{T}_k) \neq \varepsilon, \\ \mu_1(A(k)) &\neq \varepsilon, \quad \mu_2(A(k)) \neq \varepsilon, \quad \mu(A(k)) \neq \varepsilon, \\ \mu_1(A_k) &\neq \varepsilon, \quad \mu_2(A_k) \neq \varepsilon, \quad \mu(A_k) \neq \varepsilon, \end{aligned}$$

так как в данных матрицах нет строк и столбцов, элементы которых равны  $\varepsilon$ . Исходя из эти соображений можем в дальнейшем рассматривать любой из операторов  $\mu_1, \mu_2, \mu$ , так как они равны (их значение – минимальный отличный от  $\varepsilon$  элемент матрицы, на которую действует оператор). Будем в дальнейшем все эти операторы обозначать как  $\mu$ . Рассмотрим также три вспомогательные леммы.

**Лемма 4** *Функция*

$$f(x) = \frac{x(M-1) + 1}{M} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x, \quad x \in [1, +\infty).$$

имеет лишь один экстремум на рассматриваемой области.

**Доказательство.** Найдем экстремум данной функции, взяв производную данной функции по  $x$  и приравняв полученный результат нулю.

$$f'(x) = \left( \frac{x(M-1) + 1}{M} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x \right)' = 0$$

Отсюда имеем:

$$\frac{p^x}{M(2x-1)^{3/2}} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a &= 2(M-1) \ln p & b &= 3(M-1) - (3M-5) \ln p \\ c &= (4-3M) - (4-M) \ln p & d &= M-1 + \ln p \end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что  $\frac{p^x}{M(2x-1)^{3/2}} > 0$  для рассматриваемого случая:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (4.2)$$

Решения данного уравнения третьей степени в общем виде имеют довольно сложный вид, но лишь одно из них принадлежит  $[1, +\infty)$ . Ниже на рис.14 приведены ряд графиков для разных  $M$  и  $p$  (полином третьей степени обозначается как  $F(x)$ ), а именно (слева направо): ( $M = 1, p = 0.75$ ), ( $M = 50, p = 0.3$ ) и ( $M = 10, p = 0.75$ ). ■

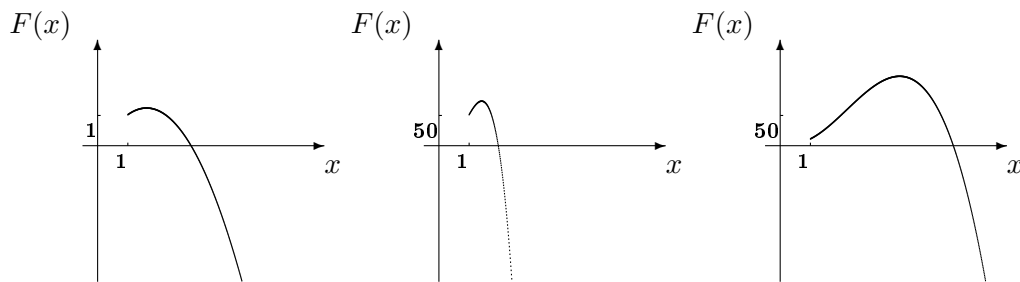


Рис.14.

**Следствие 7** При  $M = 1$  искомая точка максимума на  $[1, +\infty)$  будет

$$x_{max} = \frac{3 \ln(p) - \sqrt{\ln^2(p) - 6 \ln(p) + 1} - 1}{4 \ln(p)}. \quad (4.3)$$

**Доказательство.** Подставляя  $M = 1$  в (4.2) получим:

$$(2 \ln p) x^2 + (1 - 3 \ln p) x + \ln p = 0,$$

Откуда и получаем (4.3). ■

Следующая лемма использовалась ранее в статьях, посвященных подобным оценкам (см., например, [20])

**Лемма 5** Пусть неотрицательная функция  $f(x)$  имеет только одну точку максимума и является монотонной убывающей при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда можем оценить сверху представленный ниже ряд следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(k_{max}) + \int_1^{\infty} f(x) dx,$$

где  $k_{max} = \operatorname{argmax} \{f(\lfloor x_{max} \rfloor), f(\lceil x_{max} \rceil)\}$ , где  $x_{max}$  – аргумент, которому соответствует максимальное значение  $f(x)$  для  $x \geq 1$ .

**Доказательство.** Для доказательства этой леммы достаточно воспользоваться тем фактом, что функция монотонно возрастает на первом из интервалов (до своего максимума), а затем монотонно убывает. Отсюда можем воспользоваться стандартным методом оценивания каждой из частей ряда с помощью интеграла, а особенность (наличие данной точки максимума) учесть в дополнительном слагаемом в оценке. ■

**Лемма 6**

$$\int_1^{\infty} \frac{x(M-1)+1}{M} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x dx = \frac{p(M+1)}{8Mq} + \frac{3p(M-1)}{16Mq^2} + \frac{\sqrt{\pi qp} (3(M-1) + 4q - 4(M+1)q^2)}{32Mq^3} (1 - \operatorname{erf}(\sqrt{q})),$$

где  $q = -\ln(p)/2$ ,

**Доказательство.**

$$\int_1^{\infty} \frac{x(M-1)+1}{M} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x dx = \int_0^{\infty} \frac{(x+1)(M-1)+1}{M} \frac{x}{\sqrt{2x+1}} p^{x+1} dx$$

$$= p \int_0^{\infty} \left[ \frac{x(M-1)}{M} + 1 \right] \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \exp(-\lambda x) dx,$$

где  $\lambda = -\ln p \geq 0$ . Отсюда, можем решить полученный интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} \frac{x(M-1)+1}{M} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x dx \\ &= \frac{p(M-1)}{2M} \int_0^{\infty} \frac{x(2x+1)-x}{\sqrt{2x+1}} \exp(-\lambda x) dx + p \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \exp(-\lambda x) dx \\ &= \frac{p}{4\lambda^2 M} [\lambda(M+1) + 3(M-1) \\ & \quad - \frac{\lambda^2(M+1) - 2\lambda - 3(M-1)}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{\pi} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right) \right) ]. \end{aligned}$$

■

Заметим, что ряд обычных и вероятностных свойств, рассмотренных и доказанных ранее, будут использованы в дальнейших рассуждениях.

#### 4.4 Нижние оценки

Предположим, что для любого  $i = 1, \dots, n$  случайные величины  $\tau_{i1}, \tau_{i2}, \dots$  – одинаково распределены и независимы. Тогда справедливы следующие утверждения (см., например [22, 20]):

**Лемма 7** Если  $\|E[\mathcal{T}_1]\| > \mu(E[\mathcal{T}_1])$ , то выполняется неравенство

$$E\|A_\nu\| \geq \alpha p(1-p^m) - \beta p \left( \frac{1-p^m}{1-p} - mp^m \right) + \gamma \frac{p}{1-p}, \quad (4.4)$$

где  $m = \lfloor \alpha/\beta \rfloor$  и

$$\alpha = E\|A(1)\| - \mu(E[\mathcal{T}_1]),$$

$$\beta = \|E[\mathcal{T}_1]\| - \mu(E[\mathcal{T}_1]),$$

$$\gamma = \|E[\mathcal{T}_1]\|.$$

**Доказательство.** Рассмотрим математическое ожидание

$$\begin{aligned} E\|A_\nu\| &= (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} E\|A_k\| p^k \\ &= (1-p) \left( \sum_{k=1}^m E\|A_k\| p^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} E\|A_k\| p^k \right). \end{aligned}$$

Сначала запишем

$$\|A_k\| = \|A(k) \otimes \cdots \otimes A(1)\| \geq \|(\mathcal{T}_k \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_2) \otimes A(1)\|.$$

Переходя к математическому ожиданию, получим

$$\begin{aligned} E\|A_k\| &\geq E\|E(\mathcal{T}_k + \cdots + \mathcal{T}_2) \otimes A(1)\| = E\|((k-1)E[\mathcal{T}_1]) \otimes A(1)\| \\ &\geq \mu((k-1)E[\mathcal{T}_1]) \otimes E\|A(1)\| = (k-1)\mu(E[\mathcal{T}_1]) + E\|A(1)\|. \end{aligned}$$

Теперь для первой суммы будем иметь

$$\sum_{k=1}^m E\|A_k\| p^k \geq \mu(E[\mathcal{T}_1]) \sum_{k=1}^m (k-1)p^k + E\|A(1)\| \sum_{k=1}^m p^k.$$

Учитывая, что  $A_k \geq \mathcal{T}_k \otimes \cdots \otimes \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_k + \cdots + \mathcal{T}_1$ , получим

$$E\|A_k\| \geq \|E(\mathcal{T}_k + \cdots + \mathcal{T}_1)\| = \|kE[\mathcal{T}_1]\| = k\|E[\mathcal{T}_1]\|.$$

Тогда для второй суммы имеем неравенство

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} E\|A_k\| p^k \geq \|E[\mathcal{T}_1]\| \sum_{k=m+1}^{\infty} kp^k.$$

Объединяя полученные неравенства, с учетом введенных выше обозначений  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  получим

$$\begin{aligned} E\|A_\nu\| &\geq (1-p) \left( \alpha \sum_{k=1}^m p^k - \beta \sum_{k=1}^m kp^k + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} kp^k \right) \\ &= \alpha p(1-p^m) - \beta p \left( \frac{1-p^m}{1-p} - mp^m \right) + \gamma \frac{p}{1-p}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Очевидно, что правая часть (4.4) принимает наибольшее значение при тех же значениях  $m$ , при которых достигается максимум функции

$$\Phi(m) = \alpha \sum_{k=1}^m p^k - \beta \sum_{k=1}^m kp^k = \sum_{k=1}^m (\alpha - k\beta)p^k.$$

Заметим, что  $\alpha \geq \beta > 0$ . Тогда ясно, что функция  $\Phi(m)$  является возрастающей до тех пор, пока  $(\alpha - m\beta) \geq 0$ , и принимает наибольшее значение при  $m = \lfloor \alpha/\beta \rfloor$ . ■

**Лемма 8** Если  $\|E[\mathcal{T}_1]\| = \mu(E[\mathcal{T}_1])$ , то имеет место неравенство

$$E\|A_\nu\| \geq p \left( \alpha + \frac{\gamma}{1-p} \right). \quad (4.6)$$

**Доказательство.** Рассмотрим неравенство (4.5). При условии, что  $\beta = \|E[\mathcal{T}_1]\| - \mu(E[\mathcal{T}_1]) = 0$ , правая часть неравенства принимает наибольшее значение при  $m = \infty$ . После вычисления соответствующих сумм получим неравенство (4.6). ■

Заметим, что условие леммы 8 выполняется тогда и только тогда, когда для всех  $i = 1, \dots, n$  значения  $E[\tau_{i1}]$  равны.

## 4.5 Верхние оценки

**Лемма 9** Справедливо неравенство

$$E\|A_\nu\| \leq \frac{p}{1-p} E\|A(1)\|. \quad (4.7)$$

**Доказательство.** Учитывая, что

$$\|A_\nu\| \leq \|A(\nu)\| \otimes \dots \otimes \|A(1)\| = \|A(\nu)\| + \dots + \|A(1)\|,$$

а также  $E[\nu] = p/(1-p)$ , применим тождество Вальда:

$$E\|A_\nu\| \leq E \sum_{k=1}^{\nu} \|A(k)\| = \frac{p}{1-p} E\|A(1)\|. \quad \blacksquare$$

Далее рассмотрим верхнюю оценку для среднего времени работы сети с одним возможным состоянием. Иными словами, наша сеть имеет строго определенную топологию сетевого графа. Тогда справедлива следующая лемма.



**Лемма 10** Для сети со строго определенной топологией сетевого графа, при условии, что  $D\tau_{i1} < \infty$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , выполняется неравенство

$$E\|A_\nu\| \leq \left( \frac{p}{1-p} + rp \right) E\|\mathcal{T}_1\| + r(1-p)C(p)\sqrt{D\|\mathcal{T}_1\|}, \quad (4.8)$$

где  $r$  – длина максимального пути в графе сети, а  $C(p)$  вычисляется по формуле

$$C(p) = \frac{p}{4q} \left( 1 + \frac{\sqrt{\pi}(1-2q)}{2\sqrt{pq}} (1 - \operatorname{erf}(\sqrt{q})) \right) + H(1, p),$$

где  $q = -\ln(p)/2$ ,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt, \quad H(1, p) = \max_k \left\{ \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} p^k \right\}$$

и

$$\arg(H(1, p)) = \frac{3 \ln(p) - \sqrt{\ln^2(p) - 6 \ln(p) + 1} - 1}{4 \ln(p)}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся следующей оценкой, полученной в [48]:

$$E\|A_k\| \leq (k+r)E\|\mathcal{T}_1\| + r \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{D\|\mathcal{T}_1\|}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} E\|A_\nu\| &= (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} E\|A_k\| p^k \\ &\leq (1-p) \left( E\|\mathcal{T}_1\| \sum_{k=1}^{\infty} (k+r)p^k + r \sqrt{D\|\mathcal{T}_1\|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} p^k \right). \end{aligned}$$

Сначала вычислим первую сумму в правой части неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+r)p^k = \frac{p}{1-p} \left( \frac{1}{1-p} + r \right).$$

Несложно заметить, что вторую сумму можно оценить с помощью леммы 4 и следствия 7:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} p^k \leq \int_1^{\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x dx + H(1, p)$$

а по лемме 6 для  $M = 1$ :

$$\int_1^{\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x dx = \frac{p}{4q} \left( 1 + \frac{\sqrt{\pi}(1-2q)}{2\sqrt{pq}} (1 - \operatorname{erf}(\sqrt{q})) \right),$$

где  $q = -\ln(p)/2$ . Отсюда приходим к неравенству (4.8). ■

Оценки из лемм 9 и 10 были получены ранее и опубликованы в [22, 20], где еще рассматривались сети только со строго определенной топологией сетевого графа. Позднее был получен более общий результат, к рассмотрению которого мы и переходим. Построим подобную оценку среднего времени работы для сети, топология сетевого графа которых может принимать ряд состояний, а вероятности их появления равны. Обозначим наибольшую длину пути для всех графов, соответствующих допустимым матрицам, через  $R$ . Докажем следующую рабочую лемму.

**Лемма 11** *Для сетей, топология сетевого графа которых может принимать  $M$  состояний с равными вероятностями, справедливо следующее неравенство*

$$\begin{aligned} E\|A_k\| &\leq \left( k + \frac{k(M-1)+1}{M} R \right) E\|\mathcal{T}_1\| \\ &\quad + \frac{k(M-1)+1}{M} \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} R \sqrt{D} \|\mathcal{T}_1\|. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Учитывая равномерное распределение и независимость матриц  $G_1, \dots, G_k$ , имеем

$$E\|A_k\| = \frac{1}{M^k} \sum_{G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}} E\|A(\mathcal{T}_k, G_k) \otimes \dots \otimes A(\mathcal{T}_1, G_1)\|.$$

Рассмотрим произвольную последовательность детерминированных матриц  $G_1, \dots, G_k$  и введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{A}(i) &= A(\mathcal{T}_i, G_i), \quad i = 1, \dots, k, \\ \tilde{A}_k &= \tilde{A}(k) \otimes \dots \otimes \tilde{A}(1). \end{aligned}$$

Ясно, что в последовательности  $G_1, \dots, G_k$  могут быть повторяющиеся матрицы. Пусть имеется  $l$  последовательных групп повторяющихся

матриц, состоящих из  $(i_j - i_{j-1})$  матриц, где  $j = 1, \dots, l$ ,  $i_0 = 0$  и  $i_l = k$ . Тогда можно записать

$$\|\tilde{A}_k\| \leq \underbrace{\|\tilde{A}(k) \otimes \dots \otimes \tilde{A}(i_{l-1} + 1)\|}_{(k - i_{l-1}) \text{ матриц}} \otimes \dots \otimes \underbrace{\|\tilde{A}(i_1) \otimes \dots \otimes \tilde{A}(1)\|}_{i_1 \text{ матриц}}.$$

Обозначим через  $r_j$  длину максимального пути в графе, соответствующем  $j$ -ой группе матриц. Воспользуемся оценкой, полученной в [48]:

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_k\| &\leq \bigotimes_{j=1}^l \left( \bigotimes_{m=i_{j-1}+1}^{i_j} \|\mathcal{T}_m\| \right) \otimes \left( \bigoplus_{m=i_{j-1}+1}^{i_j} \|\mathcal{T}_m\| \right)^{\otimes r_j} \\ &\leq \sum_{m=1}^k \|\mathcal{T}_m\| + lR \max_{1 \leq m \leq k} \|\mathcal{T}_m\|. \end{aligned}$$

Учитывая, что число различных последовательностей матриц  $G_1, \dots, G_k$  может быть представлено в виде

$$M \sum_{l=1}^k C_{k-1}^{l-1} (M-1)^{l-1},$$

получим

$$\begin{aligned} E\|A_k\| &\leq E \left[ \sum_{m=1}^k \|\mathcal{T}_m\| \right] + E \left[ \max_{1 \leq m \leq k} \|\mathcal{T}_m\| \right] R \frac{1}{M^{k-1}} \sum_{l=1}^k C_{k-1}^{l-1} l (M-1)^{l-1} \\ &= kE\|\mathcal{T}_1\| + E \left[ \max_{1 \leq m \leq k} \|\mathcal{T}_m\| \right] \frac{k(M-1) + 1}{M} R. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно применить оценку (4.9)

$$E \left[ \max_{1 \leq m \leq k} \|\mathcal{T}_m\| \right] \leq E\|\mathcal{T}_1\| + \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{D\|\mathcal{T}_1\|},$$

предложенную в [48]. ■

Основываясь на леммы 11, 4 и 5 можем сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 12** *Для сетей, топология сетевого графа которых может принимать  $M$  состояний с равными вероятностями, справедливо следующее неравенство*

$$E\|A_\nu\| \leq \frac{p}{1-p} \left( 1 + R \frac{M-p}{M} \right) E\|\mathcal{T}_1\| + R(1-p)C(M, p) \sqrt{D\|\mathcal{T}_1\|}, \quad (4.10)$$

при этом  $C(M, p)$  вычисляется по формуле

$$C(M, p) = \frac{\sqrt{\pi q p} (3(M-1) + 4q - 4(M+1)q^2)}{32Mq^3} (1 - \operatorname{erf}(\sqrt{q})) \\ + \frac{p(M+1)}{8Mq} + \frac{3p(M-1)}{16Mq^2} + H(M, p),$$

где  $q = -\ln(p)/2$ ,  $\operatorname{erf}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-t^2) dt$ ,

$$H(M, p) = \max_k \left\{ \frac{k(M-1) + 1}{M} \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} p^k \right\}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся (4.1) и утверждением леммы 11:

$$E\|A_\nu\| \leq (1-p)E\|\mathcal{T}_1\| \sum_{k=1}^{\infty} \left( k + R \frac{k(M-1) + 1}{M} \right) p^k \\ + (1-p)R\sqrt{D}\|\mathcal{T}_1\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(M-1) + 1}{M} \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} p^k.$$

Для первой суммы в правой части неравенства имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( k + R \frac{k(M-1) + 1}{M} \right) p^k = \frac{p}{(1-p)^2} \left( 1 + R \frac{M-p}{M} \right).$$

Для второй суммы справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(M-1) + 1}{M} \frac{k-1}{\sqrt{2k-1}} p^k \leq \int_1^{\infty} \frac{x(M-1) + 1}{M} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} p^x dx + H(M, p).$$

Вычисляя интеграл в правой части, получим требуемое неравенство. ■

Заметим, что если в рассмотренной лемме количество сетей  $M = 1$ , то мы получаем в точности утверждение леммы 10.

## 4.6 Примеры

### Пример 8

Рассмотрим результаты вычисления оценок среднего времени работы (для некоторых значений  $p$ ) сети, представленной на рис.15 и имеющей

одно возможное состояние сетевого графа. Длительности обслуживания требований в узлах  $i = 1, 2, 3, 4$  являются независимыми и имеют экспоненциальные распределения с параметрами  $\lambda_i$ .

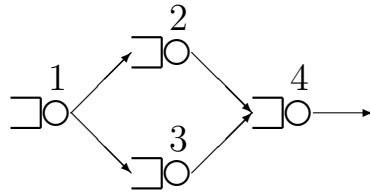


Рис.15.

В таб. 1 представлены результаты при условии, что  $\lambda_i = 1$  для всех  $i = 1, 2, 3, 4$ . Таб. 2 содержит результаты для случая, когда  $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  и  $\lambda_3 = 3$ . В таблицах также представлены оценки среднего времени работы сети вместе с границами соответствующих доверительных интервалов на уровне доверия 0.95, вычисленные на основе имитационного моделирования сети по 10000 независимым реализациям.

$p$	Оценка (4.6)	Результаты моделирования	Оценка (4.7)	Оценка (4.8)
0.05	0.178	0.181 $\mp$ 0.007	0.184	0.452
0.10	0.361	0.385 $\mp$ 0.013	0.389	0.808
0.20	0.750	0.793 $\mp$ 0.021	0.875	1.589
0.50	2.250	2.488 $\mp$ 0.069	3.500	4.776
0.80	6.000	7.729 $\mp$ 0.298	14.000	12.743
0.90	11.250	14.888 $\mp$ 0.401	31.500	23.730
0.95	21.375	27.812 $\mp$ 0.753	66.500	44.834

Таб.1.

$p$	Оценка (4.4)	Результаты моделирования	Оценка (4.7)	Оценка (4.8)
0.05	0.133	0.137 $\mp$ 0.011	0.139	0.362
0.10	0.267	0.250 $\mp$ 0.018	0.293	0.639
0.20	0.544	0.523 $\mp$ 0.029	0.658	1.249
0.50	1.155	1.811 $\mp$ 0.068	2.633	3.744
0.80	4.416	5.452 $\mp$ 0.186	10.533	9.936
0.90	9.247	10.770 $\mp$ 0.360	23.700	18.427
0.95	19.134	20.611 $\mp$ 0.705	50.033	34.712

Таб.2.

### Пример 9

Рассмотрим пример сети, в которой возможно три состояния сетевого графа. Первое состояние совпадает с рассмотренным ранее на рис.15, а два других изображены на рис.16. Длительности обслуживания требований в узлах  $i = 1, 2, 3, 4$  являются независимыми и имеют экспоненциальные распределения с параметрами  $\lambda_i$ . Появление каждого из состояний сетевого графа равновероятно, поэтому в таблице указывается лишь вероятность успешного завершения очередного цикла.

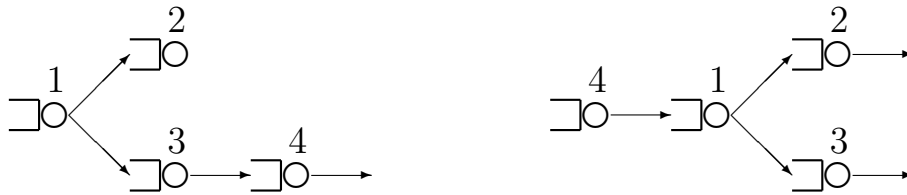


Рис.16.

В таб. 3 представлены результаты при условии, что  $\lambda_i = 1$  для всех  $i = 1, 2, 3, 4$ . Таб. 4 содержит результаты для случая, когда  $\lambda_1 = \lambda_4 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  и  $\lambda_3 = 3$ . В таблицах также представлены оценки среднего времени работы сети вместе с границами соответствующих доверительных интервалов на уровне доверия 0.95, вычисленные на основе имитационного моделирования сети по 10000 независимым реализациям.

$p$	Оценка (4.6)	Результаты моделирования	Оценка (4.7)	Оценка (4.10)
0.05	0.167	0.170 $\mp$ 0.002	0.173	0.343
0.10	0.339	0.355 $\mp$ 0.007	0.364	0.739
0.20	0.705	0.729 $\mp$ 0.020	0.819	1.713
0.50	2.138	2.631 $\mp$ 0.072	3.275	7.262
0.80	5.820	9.601 $\mp$ 0.280	13.101	33.332
0.90	11.045	20.347 $\mp$ 0.386	29.450	86.838
0.95	21.159	42.121 $\mp$ 0.697	62.171	219.851

Таб.3.

$p$	Оценка (4.4)	Результаты моделирования	Оценка (4.7)	Оценка (4.10)
0.05	0.123	0.126 $\mp$ 0.003	0.132	0.269
0.10	0.244	0.259 $\mp$ 0.011	0.277	0.583
0.20	0.488	0.578 $\mp$ 0.017	0.622	1.361
0.50	1.372	2.090 $\mp$ 0.060	2.490	5.865
0.80	4.238	7.851 $\mp$ 0.212	9.959	27.540
0.90	9.134	16.827 $\mp$ 0.357	22.407	72.822
0.95	19.071	35.127 $\mp$ 0.701	47.304	186.906

Таб.4.

Заметим, что при множестве топологических структур сетевого графа очень существенным является то, какие распределения имеют времена обслуживания требований в узлах рассматриваемой сети. Как пример, обратим внимание на то, что в указанных выше примерах весьма заметна разница в верхних оценках. Но при рассмотрении других распределений мы можем получить совершенно иной результат. В подтверждение сказанному рассмотрим следующий пример.

### Пример 10

Рассмотрим сеть, идентичную сети из примера 9, но с условием, что длительности обслуживания требований в узлах  $i = 1, 2, 3, 4$  являются неза-

висимыми и имеют нормальное гауссово распределение с параметрами  $(50, 0.001)$ . При данных параметрах вероятность появления отрицательного значения случайной величины крайне мала. Вдобавок, мы использовали моделирующую формулу для приближенного получения гауссово случайной величины с параметрами  $(0, 1)$  следующего вида (см., например, [27]):

$$\eta_{(0,1)} = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i - 6,$$

где  $\alpha_i, i = 1, \dots, 12$  – равномерно распределенные на  $(0, 1)$  случайные величины, что делает невозможным появление этого события. В таб. 5 представлены значения среднего времени работы сети вместе с границами соответствующих доверительных интервалов на уровне доверия 0.95, вычисленные на основе имитационного моделирования сети по 10000 независимым реализациям, а также оценки данных величин.

$p$	Оценка (4.6)	Результаты моделирования	Оценка (4.7)	Оценка (4.10)
0.05	7.632	7.780 $\mp$ 0.557	7.895	7.807
0.10	15.556	16.040 $\mp$ 0.807	16.668	16.297
0.20	32.500	33.395 $\mp$ 1.150	37.500	35.834
0.50	100.000	116.521 $\mp$ 2.391	150.000	133.337
0.80	280.000	381.312 $\mp$ 6.307	600.002	493.351
0.90	540.000	806.495 $\mp$ 13.146	1350.003	1080.046
0.95	1045.000	1646.255 $\mp$ 40.317	2850.007	2248.453

Таб.5.

В данном примере верхняя оценка (4.10) дает более точные значения чем оценка (4.7).



## Глава 5

# Примеры использования ( $\max, +$ )-алгебры для описания динамики ряда частных сетей

В введении уже упоминалось о том, что область применения ( $\max, +$ )-алгебры намного шире той, что была представлена в материале диссертации. Далее будет рассмотрен ряд примеров, подтверждающих это.

### Пример 11

Рассмотрим линейную сеть, аналогичную той, что мы имели в главе 2.4 (рис.12), состоящую из  $n$  узлов, соединенных последовательно, имеющих бесконечную емкость и, кроме первого узла, изначально пустых. В буфере первого узла изначально находится бесконечный поток требований. Ниже (рис.17) мы для удобства снова приводим схему этой сети.

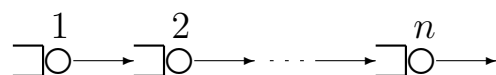


Рис.17.

Для начала, рассмотрим частный вид линейных сетей, в которых времена обслуживания требований во всех узлах для каждого рабочего цикла одинаковы.

Динамическое уравнение для данной сети, аналогично (2.3):

$$\mathbf{x}(k) = A(k) \otimes \mathbf{x}(k-1), \quad (5.1)$$

где

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{2k} & \tau_{2k} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{1k} \otimes \tau_{2k} \otimes \tau_{3k} \otimes \dots \otimes \tau_{nk} & \tau_{2k} \otimes \tau_{3k} \otimes \dots \otimes \tau_{nk} & \tau_{3k} \otimes \dots \otimes \tau_{nk} & \dots & \tau_{nk} \end{pmatrix}.$$

Но, исходя из известных нам условий о данной сети, переходная матрица  $A(k)$  переписется в следующем виде:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_k & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \tau_k \otimes \tau_k & \tau_k & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k \otimes \tau_k \otimes \tau_k \otimes \dots \otimes \tau_{nk} & \tau_k \otimes \tau_k \otimes \dots \otimes \tau_k & \tau_k \otimes \dots \otimes \tau_{nk} & \dots & \tau_k \end{pmatrix}$$

или

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_k & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \tau_k^{\otimes 2} & \tau_k & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_k^{\otimes n} & \tau_k^{\otimes (n-1)} & \tau_k^{\otimes (n-2)} & \dots & \tau_k \end{pmatrix}.$$

Расписывая рекуррентное динамическое уравнение (5.1) получим:

$$\mathbf{x}(k) = A(k) \otimes A(k-1) \otimes \dots \otimes A(1) \otimes \mathbf{x}(0) = A_k \otimes \mathbf{x}(0),$$

где  $A(k), \dots, A(1)$  имеют вид представленный выше,  $\mathbf{x}(0) = (0, \dots, 0)^T$ , а  $A_k = A(k) \otimes \dots \otimes A(1)$ , аналогично (2.5). Тогда диагональные и нижнедиагональные элементы матрицы  $A_k$ , где  $i \geq j$  есть

$$\{A_k\}_{ij} = \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes (i-j)} \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right).$$

Элементы выше диагонали для матрицы  $A_k$  равны  $\varepsilon$ . Нас интересует  $\{A_k\}_{n1}$ , так как именно этот элемент равен времени окончания обслуживания  $k$ -ого требования в  $n$ -ом узле (то есть заканчивается  $k$ -ый цикл

сети). Исходя из этого получаем:

$$\|\mathbf{x}(k)\| = \{A_k\}_{n1} = \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes(n-1)} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) = n \max_{m=1}^k \tau_m + \sum_{m=1}^k \tau_m.$$

Отсюда, решение рекуррентного динамического уравнения (5.1) для случая, когда времена обслуживания требований во всех узлах для каждого рабочего цикла одинаковы, примет следующий вид:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \\ \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) \\ \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes 2} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) \\ \vdots \\ \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes(n-1)} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{m=1}^k \tau_m \\ \max_{m=1}^k \tau_m + \sum_{m=1}^k \tau_m \\ 2 \max_{m=1}^k \tau_m + \sum_{m=1}^k \tau_m \\ \vdots \\ (n-1) \max_{m=1}^k \tau_m + \sum_{m=1}^k \tau_m \end{pmatrix}.$$

## Пример 12

Теперь рассмотрим частный вид линейных сетей, в которых времена обслуживания требований во всех узлах постоянны (но не обязательно одинаковые для всех узлов), кроме узлов-источников, в которых времена обслуживания требований есть случайные величины. При существующем условии на времена обслуживания требований мы получим, что в динамическом уравнении, аналогичном (2.3) и (5.1), переходная матрица

$A(k)$  примет следующий вид:

$$A(k) = \begin{pmatrix} \tau_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \tau_{1k} \otimes \tau_2 & \tau_2 & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{1k} \otimes \tau_2 \otimes \tau_3 \otimes \dots \otimes \tau_n & \tau_2 \otimes \tau_3 \otimes \dots \otimes \tau_n & \tau_3 \otimes \dots \otimes \tau_n & \dots & \tau_n \end{pmatrix},$$

Рассмотрим элементы матрицы  $A_k$  ( $i \geq j$ ), за исключением элементов первого столбца этой матрицы:

$$\{A_k\}_{ij} = \left( \bigoplus_{m=j}^i \tau_m \right)^{\otimes(k-1)} \otimes \left( \bigotimes_{m=j}^i \tau_m \right) \quad \text{для } i \geq 2.$$

Элементы первого столбца матрицы  $A_k$  будут иметь следующий вид:

$$\{A_k\}_{i1} = \left( \bigotimes_{m=2}^i \tau_m \right) \otimes \bigoplus_{l=1}^k \left[ \left( \bigotimes_{m=1}^l \tau_{1m} \right) \otimes \left( \bigoplus_{m=2}^i \tau_m \right)^{\otimes(k-l)} \right],$$

а общее решение рекуррентного динамического уравнения (5.1) будет:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \{A_k\}_{11} \\ \{A_k\}_{21} \\ \vdots \\ \{A_k\}_{n1} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Отсюда, время окончания  $k$ -го рабочего цикла:

$$\|\mathbf{x}(k)\| = \{A_k\}_{n1} = \left( \bigotimes_{m=2}^n \tau_m \right) \otimes \bigoplus_{l=1}^k \left[ \left( \bigotimes_{m=1}^l \tau_{1m} \right) \otimes \left( \bigoplus_{m=2}^n \tau_m \right)^{\otimes(k-l)} \right].$$

### Пример 13

Рассмотрим произвольную ациклическую сеть. Также как и в первом из рассматриваемых в данной главе классов линейных сетей (пример 11) полагаем, что времена обслуживания требований в каждом узле для одного

цикла одинаковы. Тогда для переходной матрицы  $A(k)$  в динамическом уравнении (5.1) ее произвольный элемент может быть представлен в виде:

$$\{A(k)\}_{ij} = \tau_k^{\otimes r_{ij}},$$

где  $r_{ij}$  – максимальный путь из  $j$ -го узла в  $i$ -ый узел, если он существует. Если пути нет, то  $r_{ij} = \varepsilon$  также как и значение данного элемента переходной матрицы. Тогда:

$$\{A_k\}_{ij} = \begin{cases} \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes r_{ij}} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) & , \text{если путь из } j\text{-го узла} \\ & \text{в } i\text{-ый существует;} \\ \varepsilon & , \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда, введя обозначение  $r_i = \bigoplus_{j=1}^k r_{ij}$ , решение рекуррентного динамического уравнения (5.1) можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes r_1} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) \\ \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes r_2} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) \\ \vdots \\ \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes r_n} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right) \end{pmatrix},$$

а время окончания  $k$ -го рабочего цикла рассматриваемой сети представимо в виде:

$$\|\mathbf{x}(k)\| = \left( \bigoplus_{m=1}^k \tau_m \right)^{\otimes r} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^k \tau_m \right),$$

где  $r = \bigoplus_{i=1}^k r_i$  – максимальный путь в сетевом графе.

## Пример 14

Рассмотрим линейную сеть из второго примера данной главы (пример 12), в которой времена обслуживания требований во всех узлах постоянны (но не обязательно одинаковые для всех узлов), включая узлы-источники. Тогда рассмотрим элементы матрицы  $A_k$  ( $i \geq j$ ):

$$\{A_k\}_{ij} = \left( \bigoplus_{m=j}^i \tau_m \right)^{\otimes(k-1)} \otimes \left( \bigotimes_{m=j}^i \tau_m \right).$$

и общее решение рекуррентного динамического уравнения имеет вид (5.2).

Отсюда, время окончания  $k$ -го рабочего цикла:

$$\|\mathbf{x}(k)\| = \{A_k\}_{n1} = \left( \bigoplus_{m=1}^n \tau_m \right)^{\otimes(k-1)} \otimes \left( \bigotimes_{m=1}^n \tau_m \right).$$

# Глава 6

## Оптимизация вычислений детерминированных сетей

### 6.1 Иерархия сетей и ее уровни

Рассмотрим детерминированную (относительно топологии ее сетевого графа) сеть, динамика которой описывается уравнением вида (2.3). Ориентированный граф, соответствующий матрице  $G$  должен быть ациклическим и пусть длина максимального пути в графе есть  $r$ . Тогда можно перенумеровать узлы графа и описать динамику полученной сети уравнением вида:

$$\mathbf{y}(k) = B(k) \otimes \mathbf{y}(k-1), \quad (6.1)$$

где матрица  $B(k)$  будет иметь нижнетреугольный вид и представима следующим образом:

$$B(k) = (E \oplus \mathcal{T}'_k \otimes H^T)^r \otimes \mathcal{T}'_k. \quad (6.2)$$

Вектор завершения обслуживания  $k$ -ых требований в узлах сети и матрица, на диагонали которой стоят времена обслуживания  $\tau'_{i,k}$  этих требований есть соответственно

$$\mathbf{y}(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathcal{T}'_k = \begin{pmatrix} \tau'_{1k} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & \tau'_{nk} \end{pmatrix}.$$

$H$  является  $(n \times n)$ -матрицей смежности ориентированного графа сети с перенумерованными узлами. Далее мы введем понятие уровней иерархии

сети, рассмотрим алгоритм перенумерации узлов и проанализируем вид матрицы  $B(k)$ .

### 6.1.1 Уровни иерархии

Рассмотрим  $G$  – матрицу смежности ориентированного графа сети. Из ацикличности графа следует, что существует по крайней мере один узел  $i$ , для которого  $\mathbf{P}(i) = \emptyset$ . Другими словами, в матрице  $G$  существует столбец, все элементы которого равны  $\varepsilon$ . Действительно, это легко доказать используя обратное предположение, то есть, что в матрице  $G$  не существует столбца, все элементы которого равны  $\varepsilon$ . Тогда рассмотрим произвольный столбец  $i_1$ . Из предположения следует, что в нем существует хотя бы один элемент  $g_{i_1 i_2}$ , не равный  $\varepsilon$ , что указывает на существование дуги графа  $(i_1, i_2) \in \mathbf{A}$ . Аналогично, рассмотрим столбцы  $i_2, i_3, \dots, i_{n+1}$ . В следствие конечности числа узлов графа, среди этих номеров столбцов есть повторяющиеся, что указывает на существование цикла в графе, а это противоречит условию для сетей рассматриваемого нами типа.

Предположим, что в исследуемом нами графе для узла  $i$  справедливо  $\mathbf{P}(i) = \emptyset$ . Тогда рассмотрим новый граф, отличающийся от исходного лишь отсутствием  $i$ -го узла и всех дуг из него исходящих  $\{(i, j) | j \in \mathbf{S}(i)\}$ . Из ацикличности исходного графа следует, что полученный граф также ацикличен и главный минор матрицы  $G$ , являющийся матрицей смежности полученного подграфа имеет по крайней мере один столбец, все элементы которого равны  $\varepsilon$ . Аналогично, выбрасывая из данного подграфа узел, соответствующий этому столбцу и все исходящие из него дуги получим новый подграф, для которого верны все предыдущие рассуждения. Эту операцию мы можем повторить  $n$  раз (по количеству узлов в исходном графе).

Теперь вернемся к исходному графу. Определим множество узлов

$$\mathbf{N}_1 = \{i | \mathbf{P}(i) = \emptyset\} = \{i | \forall j \in \mathbf{N} : (j, i) \notin \mathbf{A}\} = \{i | \bigoplus_{j \in \mathbf{N}} g_{ji} = \varepsilon\}.$$



Рассмотрим подграф, отличающийся от исходного лишь отсутствием узлов из множества  $\mathbf{N}_1$  и всех дуг, из этих узлов исходящих  $\{(i, j) | i \in \mathbf{N}_1, j \in \mathbf{S}(i)\}$ . Тогда определим множество

$$\mathbf{N}_2 = \{i | \forall j \in \{\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_1\} : (j, i) \notin \mathbf{A}\} = \{i | \bigoplus_{j \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}_1} g_{ji} = \varepsilon\}.$$

Аналогично можем определить

$$\mathbf{N}_3 = \{i | \forall j \in \{\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m=1}^2 \mathbf{N}_m\} : (j, i) \notin \mathbf{A}\} = \{i | \bigoplus_{j \in \{\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m=1}^2 \mathbf{N}_m\}} g_{ji} = \varepsilon\},$$

...

$$\mathbf{N}_L = \{i | \forall j \in \{\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m=1}^{L-1} \mathbf{N}_m\} : (j, i) \notin \mathbf{A}\} = \{i | \bigoplus_{j \in \{\mathbf{N} \setminus \bigcup_{m=1}^{L-1} \mathbf{N}_m\}} g_{ji} = \varepsilon\},$$

где для целого  $L$  справедливо  $\mathbf{N}_L \neq \emptyset$  и  $\mathbf{N}_{L+l} = \emptyset$  для  $l = 1, 2, \dots$ . Будем называть данные множества уровнями иерархии сети, а индексы этих множеств – номерами уровней. Постоянная  $L$  определяет количество уровней иерархии для конкретной сети.

### 6.1.2 Перенумерация узлов

Рассмотрим сеть с синхронизацией, для которой определены уровни иерархии. Тогда, предлагается следующий принцип алгоритма перенумерации узлов ориентированного графа.

**Алгоритм 1** *Узлам из уровней иерархии с меньшими номерами должны соответствовать меньшие номера в перенумерованном графе. Для узлов из одного уровня иерархии никаких условий на перенумерацию не накладывается.*

При уже выявленных (см. подглаву 6.1.1) уровнях иерархии достаточно присваивать номера по порядку (начиная с первого) узлам из уровня иерархии с номером 1, затем 2, 3 и так далее.

Ниже представлен схематический алгоритм (так, например,  $\varepsilon$  можно заменить на любую отрицательную величину, в следствие того, что

все наши величины положительны, а при моделировании проверять элементы на неотрицательность и т.п.), который обеспечивает получение соответствующей матрицы  $H$ :

**Алгоритм 2** *Алгоритм перестановки элементов:*

```

For  $i = 1$  to  $(n - 1)$ 
  For  $j = i$  to  $n$ 
    if  $\max_{k=1}^n g_{jk} = \varepsilon$  then {
      if  $(i \neq j)$  then {
        For  $l = 1$  to  $n$ 
          if  $(l \neq i$  or  $l \neq j)$  then {
             $tmp := g_{li}, g_{li} := g_{lj}, g_{lj} := tmp;$ 
             $tmp := g_{il}, g_{il} := g_{jl}, g_{jl} := tmp;$ 
          }
           $tmp := g_{ii}, g_{ii} := g_{jj}, g_{jj} := tmp;$ 
           $tmp := g_{ij}, g_{ij} := g_{ji}, g_{ji} := tmp;$ 
        }
      }
    }
  }

```

В алгоритме 2 не отражен механизм переиндексации узлов сетевого графа для соответствующего изменения вектора окончания обслуживания требований ( $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ ) и матрицы времен данных обслуживаний ( $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$ ), но реализовать это совсем не сложно.

Нетрудно заметить, что вид динамического уравнения будет соответствовать (6.1) с переходной матрицей вида (6.2). Далее мы рассмотрим более подробно структуру этой переходной матрицы.

### 6.1.3 Переходная матрица для сети с перенумерованными узлами

Прежде всего заметим, что матрица смежности  $H$  графа с перенумерованными узлами имеет верхнетреугольный вид и элементы главных миноров, соответствующих узлам из одних уровней иерархии, равны  $\varepsilon$ . Действительно, из определения уровня иерархии (подглава 6.1.1) следует, что нет дуг из узла из уровня иерархии с большим номером в узлы из уровня иерархии с меньшим номером. Если добавить к этому критерий отбора узлов в один уровень иерархии, то мы получим необходимый результат.

Отсюда, можем сформулировать лемму

**Лемма 13** *Переходная матрица  $B(k)$  для динамического уравнения сети с перенумерованными узлами имеет нижнетреугольный вид и элементы главных миноров, соответствующих узлам из одних уровней иерархии, равны  $\varepsilon$  кроме диагональных элементов, которые равны временам обслуживания  $k$ -ых требований в соответствующих узлах.*

**Доказательство.** Утверждаемое следует из вида матриц  $H$ ,  $E$  и  $\mathcal{T}'_k$ .

■

Мы можем расписать (6.1) как

$$\mathbf{y}(k) = B(k) \otimes B(k-1) \otimes \cdots \otimes B(1) \otimes \mathbf{y}(0), \quad (6.3)$$

где матрицы  $B(k)$ ,  $B(k-1)$ , ...,  $B(1)$  имеют вид из леммы 13. В следующей главе мы рассмотрим алгоритмы оптимизации вычислений при умножении этих матриц.

## 6.2 Алгоритмы оптимизации вычислений при моделировании сетей с синхронизацией

Пусть в рассматриваемой нами сети существует  $L$  уровней иерархии. Обозначим количество узлов в уровне как  $s_l$ , где  $l = 1, \dots, L$ . Обозначим  $S_l = s_1 + s_2 + \cdots + s_l$ , где  $S_0 = 0$ . Для удобства последующих

рассуждений будем рассматривать только две матрицы  $B(1)$  и  $B(2)$ , а их произведение обозначим  $C = B(2) \otimes B(1)$ .

Для вычисления каждого элемента матрицы  $C$  в случае, когда неизвестен вид матриц  $B(1)$  и  $B(2)$ , необходимо  $n$  операций обобщенного сложения  $\oplus$  и  $(n - 1)$  операций обобщенного умножения  $\otimes$ , т.е. всего

$$Op_1 = n^2(2n - 1) \quad (6.4)$$

операций для вычисления всех элементов этой матрицы.

Если воспользоваться информацией о нижнетреугольном виде матриц  $B(1)$  и  $B(2)$ , то общее количество операций при вычислении  $C$  сокращается до

$$Op_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i (2(i - j + 1) - 1) = \sum_{i=1}^n i^2, \quad (6.5)$$

так как на вычисление одного элемента  $c_{ij}$ , где  $i \geq j$ , необходимо  $(2(i - j + 1) - 1)$  операций. Но нам известно гораздо больше о виде переходных матриц, что позволяет еще более оптимизировать вычисления элементов матрицы  $C$ . Рассмотрим это далее.

Теперь найдем количество операций при вычислении  $C$ , воспользовавшись информацией из леммы 13.

**Лемма 14** *Количество операций необходимое для матрицы  $C$ , если матрицы  $B(1)$  и  $B(2)$  имеют вид из леммы 13 есть*

$$Op_3 = n + 3 \sum_{l=2}^L s_l S_{(l-1)} + 2 \sum_{l=3}^L s_l \sum_{v=1}^{l-2} s_v (S_{(l-1)} - S_v). \quad (6.6)$$

**Доказательство.** Рассмотрим элементы матрицы  $C$ . Общий вид элемента матрицы есть

$$c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n b_{ik}(1) \otimes b_{kj}(2).$$

Однако, для  $i \in (S_{l-1}, S_l]$ , где  $l = 2, \dots, L$ , и  $j \in (S_{(v-1)}, S_v]$ , где  $v = 1, \dots, (l - 1)$ :

$$c_{ij} = b_{ij}(1) \otimes t_{jj}(2) \oplus t_{ii}(1) \otimes b_{ij}(2) \oplus \bigoplus_{k=S_v+1}^{S_{(l-1)}} b_{ik}(1) \otimes b_{kj}(2);$$

для  $i = j$ :

$$c_{ij} = t_{ii}(1) \otimes t_{ii}(2);$$

для всех остальных  $i$  и  $j$  элементы матрицы  $C$  равны  $\varepsilon$ . Отсюда общее количество операций для вычисления матрицы  $C$  равно

$$\begin{aligned} Op_3 &= n + 3 \sum_{l=2}^L s_l S_{(l-1)} + 2 \sum_{l=2}^L s_l \sum_{v=1}^{l-2} s_v (S_{(l-1)} - S_v) \\ &= n + \sum_{l=2}^L s_l \left( 3S_{(l-1)} + 2 \sum_{v=1}^{l-2} s_v (S_{(l-1)} - S_v) \right) \\ &= n + 3 \sum_{l=2}^L s_l S_{(l-1)} + 2 \sum_{l=3}^L s_l \sum_{v=1}^{l-2} s_v (S_{(l-1)} - S_v). \end{aligned}$$

■

**Следствие 8** При условии что  $s_i = N$  для  $i = 1, \dots, L$  (т.е.  $S_i = iN$  для  $i = 1, \dots, L$ ) имеем

$$Op_3 = LN + 3N^2 \frac{L(L-1)}{2} + 2N^3 \sum_{l=3}^L \sum_{v=2}^{l-1} (l-v).$$

**Доказательство.** Подставим имеющиеся у нас данные в (6.6):

$$\begin{aligned} Op_3 &= n + 3 \sum_{l=2}^L s_l S_{(l-1)} + 2 \sum_{l=3}^L s_l \sum_{v=1}^{l-2} s_v (S_{(l-1)} - S_v) \\ &= LN + 3 \sum_{l=2}^L N(l-1)N + 2 \sum_{l=3}^L N \sum_{v=1}^{l-2} N((l-1)N - vN) \\ &= LN + 3N^2 \sum_{l=1}^{L-1} l + 2N^3 \sum_{l=3}^L \sum_{v=1}^{l-2} (l - (v+1)) \\ &= LN + 3N^2 \frac{L(L-1)}{2} + 2N^3 \sum_{l=3}^L \sum_{v=2}^{l-1} (l-v) \end{aligned}$$

■

Нетрудно заметить, что при условиях следствия 8:

$$Op_1 = 2L^3 N^3 - L^2 N^2;$$

$$Op_2 = \sum_{i=1}^{LN} i^2;$$

### Пример 15

Рассмотрим в качестве примера сеть состоящую из 9 узлов (см. рис. 18). У нее существует 3 уровня иерархии, первому (верхнему) из которых принадлежат узлы 1, 5 и 6. Второму уровню иерархии принадлежат узлы 2, 3, 7. Остальные узлы (4, 8, 9) принадлежат третьему уровню иерархии.

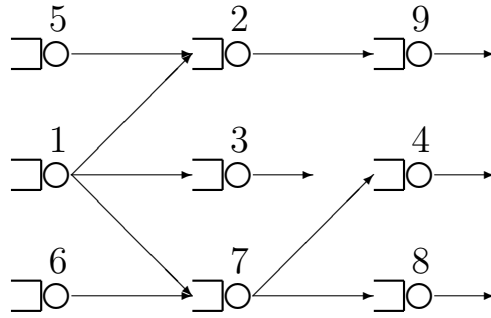


Рис.18.

Тогда мы можем перенумеровать узлы сетевого графа. Переходная матрица  $A(k)$  динамического уравнения для данной сети имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{2k} & \mathcal{T}_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{2k} \otimes \mathcal{T}_{5k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{3k} & \varepsilon & \mathcal{T}_{3k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{4k} \otimes \mathcal{T}_{7k} & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{4k} & \varepsilon & \mathcal{T}_{4k} \otimes \mathcal{T}_{6k} \otimes \mathcal{T}_{7k} & \mathcal{T}_{4k} \otimes \mathcal{T}_{7k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{5k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{6k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{7k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{6k} \otimes \mathcal{T}_{7k} & \mathcal{T}_{7k} & \varepsilon & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{7k} \otimes \mathcal{T}_{8k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{6k} \otimes \mathcal{T}_{7k} \otimes \mathcal{T}_{8k} & \mathcal{T}_{7k} \otimes \mathcal{T}_{8k} & \mathcal{T}_{8k} & \varepsilon \\ \mathcal{T}_{1k} \otimes \mathcal{T}_{2k} \otimes \mathcal{T}_{9k} & \mathcal{T}_{2k} \otimes \mathcal{T}_{9k} & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{2k} \otimes \mathcal{T}_{5k} \otimes \mathcal{T}_{9k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \mathcal{T}_{9k} \end{pmatrix}$$

Переходная матрица  $B(k)$  нового динамического уравнения при использовании алгоритма перенумерации узлов (что означает соответствующие преобразования над строками и столбцами переходной матрицы  $A(k)$ )

Вид сети $\{s_1, s_2, \dots, s_L\}$	$Op_1$	$Op_2$	$Op_3$	$Op_1/Op_2$	$Op_1/Op_3$	$Op_2/Op_3$
$\{2,5,7\}$	5292	1015	201	5.214	26.328	5.050
$\{1,5,7,3\}$	5292	1015	255	5.214	20.753	3.980
$\{4,6,9,5\}$	15600	2870	491	5.436	31.772	5.845
$\{1,1,1\}$	45	14	14	3.214	3.214	1
$\{3,3,3\}$	1377	285	144	4.832	9.563	1.979
$\{5,5,5\}$	6525	1240	490	5.262	13.316	2.531
$\{5,5,5,5\}$	15600	2870	1470	5.436	10.612	1.952
$\{4,4,4,4,4\}$	15600	2870	1780	5.436	8.764	1.612

Таб.5.

может, к примеру, иметь следующий вид:

$$\left( \begin{array}{cccccccccc}
 T_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & T_{5k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 \varepsilon & \varepsilon & T_{6k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 T_{1k} \otimes T_{2k} & T_{2k} \otimes T_{5k} & \varepsilon & T_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 T_{1k} \otimes T_{3k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & T_{3k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 T_{1k} \otimes T_{7k} & \varepsilon & T_{6k} \otimes T_{7k} & \varepsilon & \varepsilon & T_{7k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 T_{1k} \otimes T_{4k} \otimes T_{7k} & \varepsilon & T_{4k} \otimes T_{6k} \otimes T_{7k} & \varepsilon & \varepsilon & T_{4k} \otimes T_{7k} & T_{4k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
 T_{1k} \otimes T_{7k} \otimes T_{8k} & \varepsilon & T_{6k} \otimes T_{7k} \otimes T_{8k} & \varepsilon & \varepsilon & T_{7k} \otimes T_{8k} & \varepsilon & T_{8k} & \varepsilon & \varepsilon \\
 T_{1k} \otimes T_{2k} \otimes T_{9k} & T_{2k} \otimes T_{5k} \otimes T_{9k} & \varepsilon & T_{2k} \otimes T_{9k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & T_{9k}
 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 4 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Справа от матрицы стоят изначальные индексы узлов сети, соответствующие строкам (и столбцам) переходной матрицы. Времена обслуживания требований оставлены без изменений (для понимания примера).

### Пример 16

Нижеприведенная таблица 5 показывает количество операций и их отношение для различных сетей. В первом столбце задается информация о числе уровней иерархии и узлов в них в виде  $\{s_1, s_2, \dots, s_L\}$ . Пример 16 соответствует  $\{3, 3, 3\}$  в данной таблице.

## Глава 7

# Описание программы FJS

В приложении к диссертации представлена одна из простейших программ, написанная на языке *C++*, с помощью которой моделировалась работа стохастических сетей. В данном примере дана попытка показать, как можно использовать объектно-ориентированный подход в написании программ для создания систем моделирующих работу рассмотренного в диссертации класса сетей с очередями. Здесь опущены ряд деталей по получению ряда характеристик сетевого графа (например, нахождение наибольшей длины пути). Отметим, что в классе *Matrix* перегружены ряд операций над матрицами, с помощью которых можно работать в аппарате идемпотентной  $(\max, +)$ -алгебры. Класс *Random* реализует генератор случайных чисел имеющих равномерное или экспоненциальное распределение. В классе *Simul* моделируется работа сети с очередями, топология сетевого графа которой может принимать ряд состояний с заданными вероятностями. Моделирование основано на использовании класса *Matrix* с его операциями.

Входные параметры берутся из двух файлов.

Первый файл *InitData.txt* содержит следующие входные данные (даются в порядке их чтения программой с начала файла): количество сетевых топологий (*Systems\_Num*), количество узлов в сетевом графе (*Nodes\_Num*), количество итераций (*Iteration\_Num*), вероятность продолжения работы очередного цикла (*GoodPropab*), вероятности появления структур графа (*Propab[i]*,  $i = 1, \dots, Systems\_Num$ ), па-



параметры экспоненциального распределения для времен обслуживания требований в узлах сети ( $Lambda[i]$ ,  $i = 1, \dots, Nodes\_Num$ ), длины максимальных путей для всех топологий сетевого графа ( $Way[i]$ ,  $i = 1, \dots, Systems\_Num$ ).

Второй файл *Data.txt* содержит транспонированные матрицы смежности сетевых графов.

Также с консоли вводится число (*init*) – инициализация датчика случайных чисел.

Выходными параметрами программы являются среднее и выборочная дисперсия времени работы сети до момента отказа. Данные выводятся в файл *OutData.txt*.

# Заключение

Основные результаты диссертационной работы можно сформулировать следующим образом:

— Определен новый класс сетей с очередями, топология сетевых графов которых может изменяться случайным образом в начале каждого из рабочих циклов. Времена обслуживания в узлах сети – случайные величины. В начале каждого рабочего цикла существует вероятность сбоя в работе сети.

— Определено динамическое уравнение в идемпотентной  $(\max, +)$ -алгебре для нового класса сетей с очередями.

— Описан набор обычных и вероятностных свойств для ряда матричных операторов, которые использовались для получения новых результатов.

— Введено понятие среднего времени работы до момента сбоя для нового класса сетей с очередями. Построен ряд оценок для данной величины.

— Проведен анализ сетей со строго определенной топологией сетевого графа, для которых построен алгоритм перенумерации узлов. Данная процедура позволяет сократить количество вычислительных операций при моделировании этого класса сетей с очередями.

— Приведены примеры по использованию аппарата идемпотентной  $(\max, +)$ -алгебры для описания динамики сетей с очередями, отличающихся от рассмотренных в основной части диссертации.

— Дан пример программной реализации (на основе объектно-ориентированной модели) работы сетей с очередями из рассматриваемого в диссертации класса. Результаты программного моделирования исполь-

зовались в ряде примеров в диссертации.

Теоретические результаты и программное ядро могут быть использованы для дальнейшего развития методов идемпотентного анализа и моделирования сетей с очередями из рассмотренного в диссертации класса.

# Литература

- [1] *Бачелли Ф., Маковски А.М.* Использование методов теории массового обслуживания для анализа систем с ограничениями по синхронизации// Труды Института Инженеров по Электротехнике и Радиоэлектронике. 1989. Т. 1. N 1. С. 99-128.
- [2] *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986
- [3] *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. М.: Наука, 1968.
- [4] *Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А.* Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), СМБ, Физматгиз, М., 1962.
- [5] *Воробьев Н.Н.* Экстремальная алгебра положительных матриц// Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. 1967. Bd. 3, N 1. S. 39-72.
- [6] *Гладышев Е.Г.* О статистической аппроксимации// Теория вероятностей и ее применения (1965), 10, N2, 297-300.
- [7] *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. Гостехиздат, 1954.
- [8] *Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Гостехиздат, 1949.
- [9] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100с.

- [10] *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. - М.: Наука, 1971., 328 стр.
- [11] *Ермаков С.М., Мелас В.Б.* Математический эксперимент с моделями сложных стохастических систем. - Издательство Санкт-Петербургского Университета, 1993.
- [12] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982.
- [13] *Клейн Дж.* Статистические методы в имитационном моделировании. - М.: Статистика, 1978.
- [14] *Климов Г.П.* Сохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966.
- [15] *Колмогоров А.Н.* Основные положения теории вероятности. ГОНТИ, 1936.
- [16] *Коэн Г., Моллер П., Кадра Ж.-П., Вьо М.* Алгебраические средства оценивания характеристик дискретно-событийных систем // ТИИЭР. - 1989. - Т. 77, N 1. - С. 30-53.
- [17] *Кривулин Н.К.* Несмещенная градиентная оценка при оптимизации дискретных динамических систем, Математическое моделирование дискретных систем, (под редакцией Чиркова М.К.), Вычислительная техника и проблемы кибернетики, 28 (1995), Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 199-219.
- [18] *Кривулин Н.К.* Оптимизация сложных систем для имитационного моделирования// Вестник Ленинградского Университета. Математика, 23 (1990), N 8, 100-102.
- [19] *Кривулин Н.К.* Использование моделирования для оптимизации дискретных динамических систем, диссертация на соискание степе-

ни кандидата физико-математических наук, Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург, 1990.

- [20] *Кривулин Н.К., Милов Д.С.* Оценки среднего времени безотказной работы для одного класса систем с очередями // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета, 10 стр., (в печати).
- [21] *Кривулин Н.К., Милов Д.С.* Оценки среднего времени безотказной работы для одного класса систем с очередями // Сборник тезисов (под редакцией Лупанова О.Б.) XII международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики", Нижний Новгород, Издательство математико-механического факультета Московского государственного университета, Москва, 1999, Часть I, 120.
- [22] *Кривулин Н.К., Милов Д.С.* Оценки среднего времени работы для одного класса систем с очередями // Дискретные модели, синтез и оптимизация (Вычислительная техника и проблемы кибернетики, издание 29, под редакцией Чиркова М.К. и Маслова С.П.), Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, 1998, 228-242.
- [23] *Милов Д.С.* Анализ среднего времени работы систем с очередями на основе алгебраических моделей, Международная конференция "Математические методы и компьютеры в экономике", Пенза, сборник тезисов, май, 1998. Пензенский технологический институт, Пенза, 1998, Часть I, 48-49.
- [24] *Маслов В.П., Колокольцов В.Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144с.
- [25] *Михайлов Г.А.* Некоторые вопросы теории метода Монте-Карло. - Новосибирск, Наука, 1981.
- [26] *Романовский И.В.* Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом // "Кибернетика", N 4, К., 1967, снп 66-78.

- [27] *Соболев И.М.* Численные методы Монте-Карло. - М., 1981.
- [28] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х томах. - М., 1984.
- [29] *Baccelli F., Konstantopoulos P.* Estimates of Cycle Times in Stochastic Petri Nets// Applied Stochastic Analysis, Lecture Notes in Control and Informations Sciences, 177, Springer, New York, 1991, pp. 1–20.
- [30] *von Bahr B., Esseen C.-G.* Inequalities for the  $r$ -th Absolute Moment of a Sum of Random Variables,  $1 \leq r \leq 2$ // Ann. Math. Statist. 36 (1965), 299–303.
- [31] *Cassandras C.G., Strickland S.G.* Perturbation Analytic Methodologies for Design and Optimization of Communication Networks// IEEE J. Select. Areas Commun., vol 6, issue 1, 1988, p.158–171.
- [32] *Chen L., Chen C.-L.* A Fast Simulation Approach for Tandem Queueing Systems// Proc. 1990 Winter Simulation Conf. (Balci O., Sadowski R.P., Nance R.E., eds), 1990, p. 539–546.
- [33] *Cuningham-Green R.A.* Minimax Algebra // Lecture notes in economics and mathematical systems, 166 / Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [34] *Disney R.L., König D.* Queueing Networks: a Survey of Their Random Processes// SIAM Review 27 (1985), no. 3, 335–403.
- [35] *Ermakov S.M., Krivulin N.K.* Efficient Parallel Algorithms for Tandem Queueing System Simulation, in Proc. 3rd Beijing International Conference on System Simulation and Scientific Computing, Beijing, China, October 17–19, 1995, Delayed Papers, 8-12.
- [36] *Ermakov S.M., Krivulin N.K.* Efficient Algorithms for Tandem Queueing System Simulation, Applied Mathematics Letters, 7 (1994), no. 6, 45–49.
- [37] *Ermakov S.M., Krivulin N.K., Melas V.B.* Efficient Methods of Queueing Systems Simulation, in Proc. European Simulation

- Multiconference, Copenhagen, Denmark, June 17-19, 1991, (Mosekilde E., ed.), 8–20.
- [38] *Glasserman P., Yao D.D.* Stochastic Vector Difference equations with stationary coefficients, *J. Appl. Probab.* 32 (1995), 851–866.
- [39] *Greenberg A.G., Ler B.D.* *Proc. Camb. Phil. Soc.* vol 48, 1952, p. 277–289.
- [40] *Gumbel E.J.* The Maxima of the Mean Largest Value and of the Range// *Ann. Math. Statist.* 25 (1954), 76–84.
- [41] *Haber S.* A Combination of Monte Carlo and Classical method for evaluating multiple integral// *Bull. Amer. Math. Soc.* 1968, 74, 683–686.
- [42] *Hammersley J.M., Handscomb D.C.* *Monte Carlo Method*, - London, N.Y., 1964.
- [43] *Hartly H.O., David H.A.* Universal Bounds for Mean Range and Extrem Observation// *Ann. Math. Statist.* 25 (1954), 89–99.
- [44] *Kiefer J., Wolfowitz J.* On the Theory of Queues with Many Servers// *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol 78, 1955, p. 1–18.
- [45] *Kingman J.F.C.* Subadditive Ergodic Theory// *Ann. Probab.* 1 (1973), 883–909.
- [46] *Kleinrock L.* *Queueing Systems, Volume II: Computer Applications*, John Wiley, N.Y., 1976.
- [47] *Krivulin N.K.* Simple Bounds on the Mean Cycle Time in Acyclic Queueing Networks// in *Proc. 3rd St.Petersburg Workshop on Simulation*, St.Petersburg, June 28-July 3, 1998. St.Petersburg Univ. Press, St.Petersburg, 1998, 331-337.
- [48] *Krivulin N.K.* Monotonicity properties and simple bounds on the mean cycle time in acyclic fork-join queueing networks// *Recent Advances*



in Information Science and Technology/ Ed. by Mastorakis N. World Scientific, 1998. P. 147-152.

- [49] *Krivulin N.K.* Bounds on Mean Cucle Time in Acyclic Fork-Join Queueing Networks// Proc. Intern. Workshop on Discrete Event Systems, Cagliari, Italy, August 26-28, 1998, IEE, London, 1988, pp. 469–474.
- [50] *Krivulin N.K.* Max-plus algebra models of queueing networks// Proc. Intern. Workshop on Discrete Event Systems WODES'96. London: University of Edinburgh, UK, August 19-21, 1996. The Institution of Electrical Engineers, 1996. P. 76–81.
- [51] *Krivulin N.K.* The Max-Plus Algebra Approach in Modelling of Queueing Networks, in Proc. 1996 SCS Summer Computer Simulation Conference (SCSC-96), July 21-25, Portland, OR (V. Wayne Ingalls, Joeseph Cynamon, Annie Saylor, eds.). The Society for Computer Simulation, 1996, 485-490.
- [52] *Krivulin N.K.* A Max-Algebra Approach to Modeling and Simulation of Tandem Queueing Systems, *Mathematical and Computer Modelling*, 22 (1995), no.3, 25-31.
- [53] *Krivulin N.K.* Algebraic Models in Simulation of Tandem Queueing Systems, in Proc. 1995 Summer Computer Simulation Conference, (Tuncer I. Oren, Louis G. Birta, eds.), Simulation Councils, Inc., 1995, 9-14.
- [54] *Krivulin N.K.* Unbiased Gradient Estimation in Queueing Networks with Parameter-Dependent Routing, in Proc. International Conference on Control and Information 1995, (Wong Wing-Shing, ed.), The Chinese University Press, Hong Kong, 1995, 351-356.
- [55] *Krivulin N.K.* An Algebraic Approach to Modeling and Simulation of Tandem Queueing Systems, in Proc. European Simulation

- Multiconference, Prague, Czech Republic, June 5-7, 1995, (Miroslav Snorek, Milan Sujansky, Alexander Verbraeck, eds.), 271-275.
- [56] *Krivulin N.K.* Recursive Equations Based Models of Queueing Systems, in Proc. European Simulation Symposium, Istanbul, Turkey, October 9-12, 1994, (Ali R. Kaylan, Axel Lehmann, Tuncer I. Oren, eds.), 252-256.
- [57] *Krivulin N.K.* Using Max-Algebra Linear Models in the Representation of Queueing Systems, in Proc. 5th SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Snowbird, UT, June 15-18, 1994, (John G. Lewis, ed.), 155-160.
- [58] *Krivulin N.K.* A Recursive Equations Based Representation for the G/G/m Queue, Applied Mathematics Letters, 7 (1994), no. 3, 73-78.
- [59] *Krivulin N.K.* Unbiased Estimates for Gradients of Stochastic Network Performance Measures, Acta Applicandae Mathematicae, 33 (1993), 21-43.
- [60] *Krivulin N.K.* An Analysis of Gradient Estimates in Stochastic Network Optimization Problems, in Proc. 3rd International Workshop on Model-Oriented Data Analysis, Petrodvorets, Russia, May 25-30, 1992, (Muller W.G., Wynn H.P., Zhigljavsky A.A., eds.), Physica-Verlag, 1993, 227-240.
- [61] *Krivulin N.K.* An Analysis of the Least Median of Squares Regression Problem, in Proc. 10th Symposium on Computational Statistics, Neuchatel, Switzerland, August, 1992, (Dodge Y., Whittaker J., eds.), 1, Physica-Verlag, 1992, 471-476.
- [62] *Krivulin N.K.* Optimization of Complex Systems for Simulation Modeling Vestnik Leningrad University: Mathematics, 23 (1990), no. 2, 64-67.
- [63] *Krivulin N.K., Milov D.S.* Bounds on the Mean Working Time for Queueing Networks with Random Topology // in Proceedings 3rd St.Petersburg Workshop on Simulation, St.Petersburg, June 28-July 3, 1998. St.Petersburg University Press, St.Petersburg, 1998, 338-339.

- [64] *Krivulin N.K., Milov D.S.* An Algebraic Model of Queuing Networks // in Proceedings 2nd St.Petersburg Workshop on Mathematical Methods in Stochastic Simulation and Experimental Design, St.Petersburg, June 18-21, 1996. (Ermakov S.M., Melas V.B., eds.), St.Petersburg University Press, St.Petersburg, 1996, 156-161.
- [65] *Krivulin N.K., Nevzorov V.B.* On Evaluation of the Mean Service Cycle Time in Tandem Queuing Systems. 2000, (in edition).
- [66] *Loynes R.M.* The Stability of a Queue with Non-Independent Inter-Arrival and Service Times// Proc. Camb. Phil. Soc. 58 (1962), no. 3, 497–520.
- [67] *Lindley D.V.* The Theory of Queues with Single Server// Proc. Camb. Phil. Soc. vol 48, 1952, p. 277–289
- [68] *Marcinkiewicz J., Zigmund A.* Sur les Fonctions Indépendantes// Fund. Math. 29 (1937), 60–90.
- [69] *Rubinstein R.Y.* Simulation and the Monte Carlo Method, - N.Y., 1981.
- [70] *Sacks J.* Ergodicity of Queues in Series// Ann. Math. Statist. 31 (1960), 579–588.
- [71] *Shaked M., Shanthikumar J.G.* Stochastic Convexity and its Applications// Adv. Appl. Prob., vol 20, 1988, p. 427–446.
- [72] *Shanthikumar J.G., Yao D.D.* Second–Order Stochastic Properties in Queueing Systems// Proc. IEEE, vol 77, issue 1, 1989, p. 162–170.

# Приложения

## MATRIX.H

```
////////////////////////////////////  
//  
//  
// Класс Matrix. Реализует перегруженные операции над матрицей:  
//  
// сложение, умножение, возведение в степень специально для работы  
//  
// в (макс,+)-алгебре.  
//  
//  
////////////////////////////////////  
  
typedef double* DPTR;  
typedef int* IPTR;  
  
class Matrix  
{  
  
private:  
    int row;  
    int col;  
  
public:  
    DPTR* array;  
  
public:  
    Matrix() {};  
    Matrix(int, int);  
    ~Matrix();  
  
    Matrix& operator*(const Matrix& matrix);  
    Matrix& operator+(const Matrix& matrix);
```

```
Matrix& operator()(int);

double operator&(void);
void operator!(void);

void Matrix_Init(int,int);
void Matrix_Init(int,int,DPTR*);

double Ret_Max(double,double);
double Ret_Max(DPTR*,DPTR*,int,int);
};
```

## RANDOM.H

```
////////////////////////////////////  
//  
//  
// Класс Random. Реализует датчик случайных чисел для равномерного  
//  
// и экспотенциального распределения.  
//  
//  
////////////////////////////////////  
  
class Random {  
public:  
    Random() {};  
    void rninit(int);  
    double rnunif(void);  
    double rnexp (void);  
};
```

## SIMUL.H

```
////////////////////////////////////
//
//
// Класс Simul. Базируясь на методах, реализованных в классе Matrix,
//
// моделирует работу сети с очередями, топология сетевого графа
//.
// которой может принимать ряд состояний с заданными вероятностями.
//
//
////////////////////////////////////

#include "matrix.h"
#include "random.h"

typedef char** CHPTR;

class Simulation {

private:
    Matrix Result_Matrix;
    Matrix Unitary_Matrix;
    Matrix Service_Matrix;
    Matrix* Adjacent_Matrix;

private:
    double GoodPropab;
    DPTR Propab;
    DPTR Lambda;
    IPTR Way;

private:
    int Systems_Num;
    int Nodes_Num;
    int Iteration_Num;

public:
    int Init_Generator;

public:
```

```
Random rand_value;

Simulation() {};
Simulation(char*,char*);
~Simulation() {};

void Calculation(void);
void Init_Service(void);
void Result(double,double);

int Ret_Max_Way(int);
int Ret_Index_System(void);
};
```



## MATRIX.CPP

```
#include <stdio.h>
#include "matrix.h"

#define infty -1

Matrix::Matrix(int row, int col)
{
    this -> row = row;
    this -> col = col;

    array = new DPTR[row];

    for(int i = 0; i < row; i++)
        array[i] = new double[col];
}

Matrix::~Matrix() {}

Matrix& Matrix::operator+(const Matrix& matrix)
{
    Matrix MTemp(this -> row, this -> col);

    for(int i = 0; i < this -> row; i++)
        for(int j=0; j < this -> col; j++)
            MTemp.array[i][j] = Ret_Max(array[i][j],matrix.array[i][j]);

    return MTemp;
}

Matrix& Matrix::operator*(const Matrix& matrix)
{
    Matrix MTemp(this -> row,this -> col);

    for(int i = 0; i < this -> row; i++)
        for(int j=0; j < matrix.col; j++)
            MTemp.array[i][j] = Ret_Max(this -> array,matrix.array,i,j);

    return MTemp;
}
```

```

void Matrix::operator!(void)
{

    for(int i = 0; i < (this -> row) - 1; i++)
        for(int j = i+1; j < this -> col; j++)
            this -> array[i][j] = this -> array[j][i] = infity;

    for(i = 0; i < this -> row; i++)
        this -> array[i][i] = 0;
}

Matrix& Matrix::operator()(int pow)
{
    Matrix MTemp = *this;

    for(int i = 0; i < pow-1; i++)
        MTemp = MTemp * (*this);

    return MTemp;
}

double Matrix::operator&(void)
{
    double max_val = infity;

    for(int i = 0; i < this -> row; i++)
        for(int j = 0; j < this -> col; j++)
            if(array[i][j] > max_val) max_val = array[i][j];

    return max_val;
}

double Matrix::Ret_Max(double first,double second)
{
    return (first > second)?first:second;
}

double Matrix::Ret_Max(DPTR* first,DPTR* second,int row,int col)
{
    double temp = infity;
    double summ = infity;

```

```

for(int i = 0; i < this -> row; i++) {
    if(first[row][i] < 0.0 || second[i][col] < 0.0) continue;
    summ = first[row][i] + second[i][col];
    if( summ > temp) temp = summ;
}
return temp;
}

```

```

void Matrix::Matrix_Init(int row ,int col, DPTR* _array)
{
    this -> row = row;
    this -> col = col;

    array = new DPTR[row];

    for(int i = 0; i < this -> row; i++)
        array[i] = new double[this -> col];

    for(i=0; i < this -> row; i++)
        for(int j=0; j < this -> col; j++)
            this -> array[i][j] = _array[i][j];
}

```

```

void Matrix::Matrix_Init(int row ,int col)
{
    this -> row = row;
    this -> col = col;

    array = new DPTR[row];

    for(int i = 0; i < this -> row; i++)
        array[i] = new double[this -> col];
}

```

## RANDOM.CPP

```
#include <math.h>
#include "random.h"

static unsigned int iu, iuhold, mult=663608941;
const double flt = 0.232830643654e-9;

double Random::rnunif()
{
    iu *= mult;
    return (flt*iu);
}

void Random::rninit ( int iufir)
{
    iu = ( ( iufir%2 ) ? iufir : iufir + 1 );
    iuhold = iu;
}

double Random::rnexp()
{
    return( - log( rnunif ( ) ) );
}
```

## SIMUL.CPP

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include "simul.h"

Simulation::Simulation(char* Init_file, char* Data_file)
{
    FILE* fptr = fopen(Init_file,"r");
    DPTR* temp_array;

    fscanf(fptr,"%d",&(this -> Systems_Num));
    fscanf(fptr,"%d",&(this -> Nodes_Num));
    fscanf(fptr,"%d",&(this -> Iteration_Num));
    fscanf(fptr,"%lf",&(this -> GoodPropab));

    Propab = new double[this -> Systems_Num];
    for(int i = 0; i < this -> Systems_Num; i++)
        fscanf(fptr,"%lf",&(this -> Propab[i]));

    Lambda = new double[this -> Nodes_Num];
    for(i = 0; i < this -> Nodes_Num; i++)
        fscanf(fptr,"%lf",&(this -> Lambda[i]));

    Way = new int[this -> Systems_Num];
    for(i = 0; i < this -> Systems_Num; i++)
        fscanf(fptr,"%d",&(this -> Way[i]));

    Adjacent_Matrix = new Matrix[this -> Systems_Num];
    temp_array = new DPTR[Nodes_Num];
    for(i = 0; i < Nodes_Num; i++)
        temp_array[i] = new double[Nodes_Num];

    FILE* fptr_data = fopen(Data_file,"r");
    for(i = 0; i < this -> Systems_Num; i++)
    {
        for(int j = 0; j < Nodes_Num; j++)
            for(int k = 0; k < Nodes_Num; k++)
                fscanf(fptr_data,"%lf",&(temp_array[j][k]));

        Adjacent_Matrix[i].Matrix_Init(Nodes_Num,Nodes_Num,temp_array);
    }
}
```

```

Unitary_Matrix.Matrix_Init(Nodes_Num,Nodes_Num);
!Unitary_Matrix;

Service_Matrix.Matrix_Init(Nodes_Num,Nodes_Num);
!Service_Matrix;
}

void Simulation::Init_Service(void)
{
for(int i = 0; i < this -> Nodes_Num; i++)
this -> Service_Matrix.array[i][i] =
rand_value.rnexp()/(this -> Lambda[i]);
}

int Simulation::Ret_Max_Way(int index)
{
return (this -> Way[index]);
}

int Simulation::Ret_Index_System(void)
{
double alpha = rand_value.rnunif();

for(int i = 0; i < this -> Systems_Num; i++)
{
alpha -= (this -> Propab[i]);
if(alpha < 0) break;
}
return i;
}

void Simulation::Result(double max_value,double max_value2)
{
FILE* fptr = fopen("OutData.txt","a+");
double Mean =0, Disp = 0, Coef = 0;

Mean = max_value/(this -> Iteration_Num);

Disp = max_value2/(this -> Iteration_Num - 1) -
(max_value/(this -> Iteration_Num)) *
(max_value/(this -> Iteration_Num - 1));
}

```

```

Coef = 1.64 * sqrt(Disp / this -> Iteration_Num);

fprintf(fptr, "\n\n The Mean Work is %lf", Mean);
fprintf(fptr, "\n The Dispersion of Work is %lf", Disp);
fprintf(fptr, "\n The Coef is %lf \n", Coef);
}

void Simulation::Calculation(void)
{
    rand_value.rninit(Init_Generator);

    double sum_max_value = 0;
    double sum_max_value2 = 0;
    double tmp = 0;
    int index = 0;

    Matrix MTemp(Nodes_Num, Nodes_Num);

    for(int i = 0; i < this -> Iteration_Num; i++)
    {
        this -> Result_Matrix = this -> Unitary_Matrix;

        while(rand_value.rnuniform() < (this -> GoodPropab))
        {
            Init_Service();
            index = Ret_Index_System();

            MTemp = this -> Service_Matrix * this -> Adjacent_Matrix[index];
            MTemp = this -> Unitary_Matrix + MTemp;
            MTemp = MTemp(this -> Ret_Max_Way(index));
            MTemp = MTemp * (this -> Service_Matrix);
            this -> Result_Matrix = MTemp * (this -> Result_Matrix);
        }

        tmp = &Result_Matrix;
        sum_max_value += tmp;
        sum_max_value2 += tmp*tmp;
    }

    this -> Result(sum_max_value, sum_max_value2);
}

```

```
void main()
{
    int init;
    printf("\n Enter init generator number: ");
    scanf("%d",&init);

    Simulation s("InitData.txt","data.txt");
    s.Init_Generator = init;
    s.Calculation();
}
```



# INITDATA.TXT

3

4

10000

0.1

.333333333333 .333333333333 .333333333333

1 2 3 1

2 2 2

## DATA.TXT

-1 -1 -1 -1

0 -1 -1 -1

0 -1 -1 -1

-1 0 0 -1

-1 -1 -1 -1

0 -1 -1 -1

0 -1 -1 -1

-1 -1 0 -1

-1 -1 -1 0

0 -1 -1 -1

0 -1 -1 -1

-1 -1 -1 -1

## OUTDATA.TXT

The Mean Work is 0.258747

The Dispersion of Work is 0.449881

The Coef is 0.011037