САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Пепелышев Андрей Николаевич

Исследование оптимальных планов эксперимента на основе функционального подхода

Специальность

05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2002

Работа выполнена на кафедре статистического моделирования математико-механического факультета С.-Петербургского государственного Университета

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор В.Б. Мелас

Официальные оппоненты:
доктор физ.-мат. наук, профессор Е.В. Седунов
кандидат физ.-мат. наук, доцент В.М. Буре

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный технический университет

Защита состоится “ ” 2002 г. в час. на заседании диссертационного Совета Д.212.232.51 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук в Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Библиотечная площадь, дом 2, математико-механический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени М. Горького Санкт-Петербургского государственного университета по адресу: 199034, Санкт-Петербург, Университетская набережная, дом 7/9.

Автореферат разослан “ ” 2002 г.

Ученый секретарь
диссертационного Совета
д.ф.-м.н., профессор Б.К. Мартыненко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Построение и анализ регрессионных моделей есть одна из важнейших методологий исследования объектов и систем различной природы. При построении моделей на основе экспериментальных данных существенную роль играет оптимальный выбор условий проведения экспериментов. Математическая теория планирования и анализа регрессионных экспериментов была развита во второй половине XX века усилиями многих зарубежных и отечественных ученых (Дж. Элвинг, Г. Чернов, Дж. Кифер, Дж. Вольфовиц, Дж. Бокс, В.В. Налимов, Г.К. Круг, В.В. Федоров, С.М. Ермаков, М.Б. Малютов, В.П. Козлов и др.). В рамках этой теории весьма полно изучены линейные по параметрам модели с фиксированной областью планирования. Во многих случаях для стандартных областей планирования (отрезок, гипершар и гиперкуб) оптимальные планы найдены в явном аналитическом виде. Вместе с тем, задачи оптимального планирования эксперимента для нелинейных по параметрам моделей, моделей с переменной и нестандартной областью планирования, а также для оценивания экстремума функции регрессии представляют значительный теоретический и практический интерес. До сих пор аналитическое решение таких задач ограничивалось, в основном, простейшими моделями с двумя-тремя параметрами. Однако в работе (Melas, 1978) был предложен функциональный подход, который открывает перспективы значительно более полного исследования таких задач.

Идея этого подхода заключается в изучении точек и весов оптимальных планов как неявно заданных функций некоторых вспомогательных величин. Эти функции во многих случаях являются вещественными аналитическими функциями и могут быть представлены в виде степенных рядов. В частности, в работе (Мелас, 1997) такие ряды были построены для E-оптимальных планов полиномиальной регрессии на симметричном отрезке произвольной длины.

Настоящая работа посвящена применению функционального подхода к исследованию ряда задач оптимального планирования, которые относятся к описанному выше типу и не были до сих пор достаточно полно изучены.

Цель работы. Цель работы заключается в построении и исследовании оптимальных планов эксперимента для ряда линейных и нелинейных по параметрам регрессионных моделей на основе функционального подхода.

Методы исследования. В работе применяются методы математического анализа (теорема о неявном отображении, ортогональные многочлены), линейной алгебры, теории планирования регрессионных экспериментов (теоремы эквивалентности для различных критериев оптимальности), а также используются математические пакеты символьной обработки данных (Maple, Mathcad, Matlab) для вычисления коэффициентов разложений неявно заданных функций в ряды Тейлора.

Научная новизна. Впервые построены достаточно общие рекуррентные формулы для вычисления разложений точек и весов планов, оптимальных в смысле различных критериев (рассматриваемых как функции некоторых вспомогательных величин) в степенные ряды. Впервые получено полное решение ряда задач оптимального планирования эксперимента. В том числе, построены D-оптимальные планы для тригонометрической регрессии на произвольном отрезке, локально-оптимальные планы для оценивания многомерной квадратичной функции регрессии на гипершаре и гиперкубе.

Теоретическая и практическая ценность. Разработаны общие методы для разложения точек и весов оптимальных планов, рассматриваемых как функции некоторых вспомогательных величин, в степенные ряды. Эти методы могут быть использованы для построения и изучения оптимальных планов эксперимента для линейных и нелинейных моделей при различных критериях оптимальности. Построены и изучены оптимальные планы для ряда конкретных моделей. Эти планы могут быть использованы на практике, в частности, в некоторых микробиологических исследованиях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинаре кафедры статистического моделирования математико-механического факультета СПбГУ, а также на 4-ом международном Санкт-Петербургском семинаре по стохастическому моделированию (июнь 2000). Работа над диссертацией была поддержана грантами правительства Санкт-Петербурга для молодых ученых и аспирантов, а также грантами РФФИ (NN 98-01-00342, 00-01-00495).

Публикации. По теме диссертации опубликовано девять работ [10]-[18].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Библиография содержит 52 наименования. Общий объем работы — 150 страниц.

Содержание работы

Диссертация посвящена построению и исследованию оптимальных планов эксперимента для ряда линейных и нелинейных по параметрам регрессионных моделей.

Планом эксперимента называется дискретная вероятностная мера, задаваемая таблицей

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix},$$

где $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ — точки некоторого множества $\mathcal{X}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Задача состоит в нахождении плана эксперимента, на котором достигается экстремум (максимум или минимум) величины

$$\Phi(M(\xi)),$$

где Φ — некоторая заданная функция (критерий оптимальности), $M(\xi)$ — информационная матрица плана ξ. Для линейной по параметрам функции регрессии $\beta^T f(x)$, где $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ — вектор заданных базисных функций, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ — вектор неизвестных параметров, информационная матрица имеет вид

$$M(\xi) = \left(\sum_{l=1}^n f_i(x_l) f_j(x_l) w_l\right)_{i,j=1}^m .$$

Для нелинейной по параметрам функции регрессии заданного вида $\eta(x,\beta)$ информационная матрица имеет вид

$$M(\xi) = M(\xi, \beta^o) = \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \eta(x_l, \beta^o)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \eta(x_l, \beta^o)}{\partial \beta_j} w_l \right)_{i,j=1}^{m},$$

где β^o — заданное приближение к вектору значений неизвестных параметров.

Во Введении кратко описаны основные результаты диссертации.

В главе 1 дается краткий обзор основных понятий и методов теории оптимального планирования регрессионных экспериментов, описана методология функционального подхода и вводятся рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов разложения в ряд Тейлора неявно заданных функций. В §1.1 вводится уравнение регрессии, формулируются теорема Гаусса-Маркова о наилучших линейных несмещенных оценках, критерии оптимальности и соответствующие им теоремы эквивалентности, вводится понятие локально оптимального плана и вид функций регрессии, которые будут исследованы в диссертации.

В §1.2 описывается методология функционального подхода. Основным звеном этой методологии является введение уравнения вида

$$g(\Theta, u) = 0,$$

где Θ — вектор, включающий элементы оптимального плана (точки и веса) зависящие от вспомогательных величин $u = (u_1, \dots, u_k)^T$, g — явно заданная вектор-функция. Такое уравнение может быть получено из необходимых условий экстремума функции $\Phi(M(\xi, \beta^o))$, на основе применения теорем эквивалентности и определения числа точек в оптимальном плане при условии вида $u \in U$, где U — некоторое множество значений вспомогательных величин. Если при $u \in U$ число точек в оптимальном плане не изменяется, вектор-функция g является вещественной аналитической и матрица Якоби является невырожденной, то в силу теоремы о неявном отображении указанное уравнение определяет точки плана как неявно заданные вещественные аналитические функции вспомогательных величин. В §1.3 рассматривается задача вычисления коэффициентов разложения в ряд Тейлора вектор-функции $\Theta(u)$, являющейся решением уравнения $g(\Theta, u) = 0$. В случае, когда Θ и u — одномерные величины, рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов ряда могут быть получены с помощью метода неопределенных коэффициентов Эйлера. Пусть $\Theta \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$. Дифференцируя по u тождество $g(\Theta(u), u) \equiv 0$ и полагая $\psi(\Theta, u) = -\frac{\partial}{\partial u} g(\Theta, u) / \frac{\partial}{\partial \Theta} g(\Theta, u)$, получаем уравнение

$$\Theta'(u) = \psi(\Theta(u), u),\ \Theta(u_{(0)}) = \Theta_{(0)}.$$

Рекуррентные формулы для нахождения величин $\Theta^{(l)}(u_{(0)})$, $l = 1, 2, \ldots$, хорошо известны (например, Матвеев, 1995). Обобщение этих формул на случай $\Theta \in \mathbb{R}^m$ и их удобную запись можно найти в работе (Мелас, 1997). Однако в задачах планирования эксперимента определитель матрицы Якоби может обращаться в нуль именно в интересующей нас точке $u_{(0)}$, а функции g имеет весьма сложный вид. В диссертации введены рекуррентные формулы для вычисления на персональных компьютерах, которые легко распространяются на случай вырожденной в нулевой точке матрицы Якоби. Применение этих формул к ряду задач планирования эксперимента показало их высокую эффективность. Опишем эти формулы.

Пусть m, k — произвольные натуральные числа, $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_m) \in \mathbb{R}^m$, $u = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k$, $g(\Theta, u) = (g_1(\Theta, u), \ldots, g_m(\Theta, u))^T$ — некоторая вещественная аналитическая вектор-функция в некоторой окрестности U точки $(\Theta_{(0)}, u_{(0)})$ такая, что $g(\Theta_{(0)}, u_{(0)}) = 0$.

Для любого набора индексов $s = (s_1, \ldots, s_k)$, $s_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$ и любой (скалярной,векторной или матричной) вещественной аналитической функции $\phi(u)$ обозначим

$$\phi_{[s]} = (\phi(u))_{[s]} = \frac{1}{s_1! \ldots s_k!} \frac{\partial^{s_1 + \ldots + s_k}}{\partial u_1^{s_1} \ldots \partial u_k^{s_k}} \phi(u) \bigg|_{u = u_{(0)}}.$$

Введем множество

$$S_t = \{s = (s_1, \ldots, s_k))\ :\ s_i \geq 0,\ s_1 + \ldots + s_k = t\}$$

при $t = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$J(\Theta, u) = \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_i} g_j(\Theta, u))\right)_{i,j=1}^{m}.$$

Пусть $\det J(\Theta_{(0)}, u_{(0)}) \neq 0$, $J_{[0]} = (J(\Theta_{(0)}, u)_{[0]}$, I — произвольное множество индексов вида $s = (s_1, \ldots, s_k)$, $s_i \geq 0$. Для произвольной аналитической функции $\varphi(u)$ обозначим

$$\varphi_{<I>}(u) = \sum_{s \in I} \varphi_{[s]}(u_1 - u_{1(0)})^{s_1} \ldots (u_k - u_{k(0)})^{s_k}.$$

В силу теоремы о неявном отображении (Ганнинг, Росси, 1969) существует вектор-функция $\Theta(u)$, которая является вещественной аналитической в некоторой окрестности H точки $u_{(0)}$ и такая, что $\Theta(u_{(0)}) = \Theta_{(0)}$, $(\Theta(u), u) \in U$ и $g(\Theta(u), u) = 0$ при $u \in H$.

Для нахождения коэффициентов разложения этой вектор-функции в ряд Тейлора, т.е. для вычисления величин $\Theta_{[s]}$, предлагаются следующие рекуррентные формулы.

Пусть

$$I_n = \bigcup_{t=0}^{n} S_t.$$

Тогда при сформулированных выше условиях

$$\Theta_{[s]} = -J_{[0]}^{-1} \left(g(\Theta_{<I>}(u), u)\right)_{[s]}, \; s \in S_t, \; I = I_{t-1}, \; t = 1, 2, \ldots.$$

Это утверждение является частным случаем результатов параграфа 1.3.3.

В диссертации дано некоторое обобщение этих формул и описаны соответствующие алгоритмы. Эти алгоритмы используются в дальнейшем для построения разложений точек и весов оптимальных планов для ряда регрессионных моделей.

В главе 2 рассматриваются две классические линейные по параметрам регрессионные модели: 1) полиномиальная модель $f_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots, m$; 2) тригонометрическая модель $f_0(x) = 1$, $f_{2j}(x) = \cos(jx)$, $f_{2j-1}(x) = \sin(jx)$, $j = 1, \ldots, k$, на произвольном отрезке $\mathcal{X} = [a, b]$.

Для полиномиальной модели изучаются оптимальные планы для оценивания индивидуальных коэффициентов.

Для случая симметричных отрезков $a = -b$ такие планы были построены в работе (Studden, 1968). Для несимметричных отрезков задача исследовалась в работе (Sahm, 2000). Будем называть тройку чисел (n_1, n_2, n_3), где n_1 — число точек плана, совпадающих с a, n_3 — число точек плана, совпадающих с b, n_2 — число точек плана внутри отрезка, типом плана. В указанной работе доказано, что оптимальный план для оценивания любого из коэффициентов имеет один из следующих четырех типов

$$(1, m-1, 1),\ (0, m-1, 1),\ (1, m-1, 0) \text{ и } (1, m-2, 1).$$

Планы первых трех типов выражены в этой работе в явном виде через экстремальные точки многочленов Чебышева первого рода, но плана четвертого типа в явном виде найти не удается. В диссертации точки и веса планов четвертого типа в зависимости от параметра $s = (a+b)/(b-a)$ представлены в виде степенных рядов по этому параметру. Таким образом, рассматриваемая задача получила полное решение.

Для тригонометрической модели рассматривается задача нахождения D-оптимальных планов, т.е. планов, максимизирующих величину

$$\det M(\xi).$$

Решение этой задачи для стандартного отрезка $[a, b] = [-\pi, \pi]$ является классическим (Карлин, Стадден, 1966, гл. X). Однако для случая произвольных отрезков эта задача до сих пор не была решена. Ряд предварительных результатов (лемма 2.2) показывает, что задача может быть сведена к случаю

$$\mathcal{X} = [-a, a],\ 0 < a \le \pi.$$

Ключевым результатом, обеспечивающим полное решение задачи является следующая теорема.

Рассмотрим модель тригонометрической регрессии $f_0(x) = 1$, $f_{2j}(x) = \cos(jx)$, $f_{2j-1}(x) = \sin(jx)$, $j = 1, \ldots, k$, на симметричном отрезке длины $a \le \pi$ при стандартных предположениях об ошибках измерений (ошибки наблюдений — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием). Справедлива

Теорема 2.2. *1) Если $a \geq a^* = \pi(1 - \frac{1}{2k+1})$, то план эксперимента, сосредоточенный с равными весами в $2k+1$ точке*

$$t_i^* = 2\pi \frac{i-1-k}{2k+1},\ i = 1, \ldots, 2k+1$$

является D-оптимальным планом на $[-a, a]$;

2) Если $a < a^*$, то D-оптимальный план существует, единственен и сосредоточен с равными весами в точках

$$-a, -a\tau_{k-1}^*(a), \ldots, -a\tau_1^*(a), 0, a\tau_1^*(a), \ldots, a\tau_{k-1}^*(a), a,$$

где $\tau^*(a) = (\tau_1^*(a), \ldots, \tau_{k-1}^*(a))$ — аналитическая вектор-функция.

В диссертации построены и исследованы разложения вектор-функции $\tau^*(a)$ в ряд Тейлора. Проверка с помощью теорем эквивалентности показывает, что эти разложения позволяют находить оптимальные планы с высокой точностью.

В главе 3 изучены три нелинейные по параметрам регрессионные модели: экспоненциальная модель, дробно-рациональная модель и регрессионная модель, задаваемая обыкновенным дифференциальным уравнением с дробно-рациональной правой частью.

В §3.1 изучаются локально E-оптимальные планы, т.е. планы максимизирующие минимальное собственное число информационной матрицы, а также планы, локально оптимальные для оценивания индивидуальных коэффициентов для экспоненциальной функции регрессии вида

$$\eta(x, a, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} a_i e^{-\lambda_i x},$$

где $x \in \mathcal{X} = [b, +\infty)$, $a = (a_1, \ldots, a_k)^T$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^T$ — оцениваемые параметры. Эта задача до сих пор не была исследована.

Рассматривается случай таких значений нелинейно входящих параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, для которых информационная матрица любого невырожденного плана имеет минимальное собственное число кратности 1.

Положим без ограничения общности $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ и обозначим

$$\bar{\Omega} = \{\lambda;\ 0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k\}.$$

Будем называть план ξ невырожденным, если $\det M(\xi) \neq 0$.

Лемма 3.1. *Существует окрестность Ω_γ любой точки вида $\gamma(1,\ldots,1)$, $(\gamma > 0)$ такая, что при $\lambda \in \Omega_\gamma \cap \bar{\Omega}$ кратность минимального собственного числа информационной матрицы любого невырожденного плана равна 1.*

Во второй части этой леммы в явном виде указан предел локально E-оптимальных планов при $\lambda \to \gamma(1,\ldots,1)^T$.

Пусть γ фиксировано, $\Omega = \Omega_\gamma$. Легко проверить, что $\Omega = \mathbb{R}$ при $k = 1$. При $k = 2, 3$ численные эксперименты позволяют утверждать, что $\Omega = \mathbb{R}^k$, хотя формальное доказательство этого факта получить не удается. Все дальнейшие исследования ведутся для случая $\lambda \in \Omega$. В следующей лемме (лемма 3.2) установлено, что локально E-оптимальный план сосредоточен ровно в $2k$ точках, одна из которых совпадает с левой границей, причем эти точки не зависят от a. В теореме 3.1 установлено, что точки и веса E-оптимального плана определены однозначно и являются вещественными аналитическими функциями вектора λ. Вычислены коэффициенты разложения этих функций в ряд Тейлора в окрестности точки $\lambda = (1.5, 0.5)^T$ при $k = 2$. Показано, что при некотором дополнительном условии точки планов, оптимальных для оценивания индивидуальных коэффициентов, совпадают с точками локально E-оптимального плана.

В §3.2 результаты, аналогичные описанным выше, получены для дробно-рациональной модели вида

$$\eta(x, a, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{x - \lambda_i},$$

где $a_1, \lambda_1, a_2, \ldots, \lambda_k$ — оцениваемые параметры, $x \in \mathcal{X} = [b, +\infty)$, $\lambda_i < b$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.

В §3.3 рассматривается функция регрессии $\eta(t) = \eta(t, \beta)$, которая является решением дифференциального уравнения

$$\eta'(t) = \mu(t)\eta(t),$$

где $\mu(t)$ имеет вид

$$\mu(t) = \beta_1 \frac{s(t)}{s(t) + \beta_2}, \tag{0.0.1}$$

а

$$s(t) = s_0 + (\eta_0 - \eta(t))/\beta_3,$$

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ — оцениваемые параметры, $s_0 = s(0)$, $\eta_0 = \eta(0)$ — заданные начальные условия. Это уравнение широко используется в микробиологии (Перт, 1978) и носит название уравнения Моно.

В соответствии с физическим смыслом параметров мы имеем следующие условия $\beta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, $s_0, \eta_0 > 0$. Величина t имеет смысл времени и находится в интервале $[0, T]$.

В диссертации изучаются локально D- и E-оптимальные планы, а также планы, локально оптимальные для оценивания индивидуальных коэффициентов.

Эта задача исследовалась во многих работах прикладного характера чисто эмпирически, путем численного нахождения локально оптимальных планов. Однако в работе (Мелас, Пепелышев, Стригуль, 2002) был найден ряд важных теоретических результатов. Показано, что при достаточно малых значениях η_0 локально D- и E-оптимальные планы сосредоточены в трех точках, одна из которых совпадает с правой границей промежутка. Кроме того, показано, что E-оптимальные планы сосредоточены в точках экстремума линейной комбинации некоторых явно заданных функций. Найдено явное представление для информационной матрицы.

На основе этих результатов в диссертации численными методами осуществлено исследование эффективности локально-оптимальных планов по отношению к обычно используемым на практике планам в равноотстоящих точках. Показано, что как асимптотические, так и выборочные дисперсии наиболее важных параметров для стандартных планов в 2-3 раза больше, чем для локально-оптимальных. Показано, что локально E-оптимальные планы в этом смысле эффективнее локально D-оптимальных приблизительно в 1.2 раза.

Построены разложения точек локально D-оптимальных планов, рассматриваемых как функции некоторых параметров, в ряды Тейлора и исследована их чувствительность к выбору начальных приближений.

Четвертая глава посвящена построению и исследованию локально оптимальных планов для оценивания точки экстремума квадратичной функции регрессии на единичном гипершаре и гиперкубе. Эта задача в одномерном случае была решена в работе (Fedorov, Muller, 1997), но метод этой работы не пригоден в многомерном случае.

Функция регрессии имеет вид

$$\eta(x) = \eta(x, u, A, \gamma) = x^T Ax + u^T x + \gamma,\ x \in \mathcal{X},$$

где A — положительно определенная $k \times k$ матрица, $u \in \mathbb{R}^k$, $\gamma \in \mathbb{R}$, причем величина γ, а также элементы вектора u и матрицы A — неизвестные параметры. В качестве множества $\mathcal{X}$ рассматривается единичный отрезок (при $k = 1$), гипершар и гиперкуб. Требуется построить локально D-оптимальный план для оценивания точки минимума

$$b = -\frac{1}{2}A^{-1}u$$

при некотором заданном значении $b = b^o$, т.е. план, минимизирующий определитель асимптотической ковариационной матрицы вектора b (этот определитель равен определителю матрицы A^2, умноженному на величину, зависящую от плана и от b^o).

В диссертации в явном виде построены локально D-оптимальные планы для случая гипершара. Для случая гиперкуба такие планы также найдены в явном виде, но при дополнительном условии, что b^o принадлежит вложенному гиперкубу с длиной ребра 1/2. При нарушении этого условия зависимость точек и весов планов от b^o носит весьма сложный характер. Эта зависимость для случая $k = 2$ представлена в виде степенных рядов.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

1. Построены рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов разложения в степенные ряды точек и весов оптимальных планов, рассматриваемых как неявно заданные функции некоторых вспомогательных величин.

2. Построены и исследованы разложения точек и весов оптимальных планов для ряда критериев оптимальности и ряда линейных и нелинейных по параметрам функций регрессии (D-, E- и e_i-критерии; полиномиальная, тригонометрическая, экспоненциальная и дробно-рациональная моде-

ли, модель, задаваемая дифференциальным уравнением Моно).

3. Исследованы аналитические свойства точек и весов оптимальных планов как неявно заданных функций нелинейно входящих параметров или границ отрезка планирования для перечисленных моделей.

4. Численно исследована зависимость локально D-оптимальных планов от начального приближения вектора параметров и их эффективность по отношению к планам в равномерно отстоящих точках для функции регрессии, задаваемой дифференциальным уравнением Моно.

5. Получены явные аналитические выражения локально оптимальных планов для оценивания точки экстремума квадратичной функции регрессии на гипершаре и гиперкубе.

Список литературы

[1] Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М., Мир. 1969.

[2] Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва, Наука. 1976. 568 с.

[3] Матвеев Н.М. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. СПб., Изд-во С.-Петерб. ун-та. 1995.

[4] Melas V.B., Optimal designs for exponential regression. Math. Operations forsh. Statist. Ser. Statistics, 9, 1978, p.45-59

[5] Мелас В.Б. E-оптимальные планы эксперимента. Изд-во СПбГУ. 1997.

[6] Перт Дж. С. Основы культивирования микроорганизмов и клеток. Москва, Мир. 1978.

[7] Fedorov, V.V., Müller, W.C. Another view on optimal design for estimating the point of extremum in quadratic regression. *Metrika*, 46:147-157. 1997.

[8] Sahm M. Optimal designs for individual coefficients in polynomial regression. 2000. (preliminary accepted in Ann. Statist.)

[9] Studden W.J. Optimal design on Tchebycheff points. Ann. Math. Statist. 39, 1435-1447. 1968.

Список публикаций автора

[10] Мелас В.Б., Пепелышев А.Н. Степенные разложения неявных функций и локально оптимальные планы эксперимента //Статистические модели с приложениями в эконометрике и смежных областях. СПб., Изд-во НИИХ СПбГУ, 1999. С. 108-118.

[11] Мелас В.Б., Пепелышев А.Н., Планы для оценивания точки экстремума многомерной квадратичной функции регрессии.// Проблемы оптимизации дискретных систем / Под ред. М.К.Чиркова. СПб., Изд-во НИИХ СПбГУ, с. 70-86, 2001.

[12] Мелас В.Б., Пепелышев А.Н., Стригуль Н.С. Оптимальное планирование эксперимента для нелинейной регрессионной модели, используемой в микробиологии. // Сборник трудов НИИ математики и механики им. акад. В.И.Смирнова (к 70-летию основания института) / под ред. М.К.Чиркова. СПб., НИИХ СПбГУ. С. 91-112. 2002.

[13] Пепелышев А.Н. Локально E-оптимальные планы для экспоненциальных регрессионных моделей // Вестн. С.-Петербург. ун-та, СПб., Изд. СПбГУ, серия 1, вып. 3, (N 17), с. 36-47, 2002.

[14] Пепелышев А.Н. D-оптимальные планы для оценивания экстремума многомерной квадратичной регрессии на квадрате.// Проблемы оптимизации дискретных систем / Под ред. М.К.Чиркова. СПб., Изд-во НИИХ СПбГУ, с. 87-96, 2001.

[15] Cheng R.C.H., Melas V.B., Pepelyshev A.N., Optimal Design for the Evaluation of an Extremum Point. Optimum Design 2000, Ed. by A. Atkinson, B. Bogacka and A. Zhigljavsky, Kluwer, Dordreht, pp. 15-25, 2000.

[16] Dette H., Melas V.B., Pepelyshev A. Optimal designs for estimating individual coefficients in polynomial regression – a functional approach.

Preprint, Ruhr-Universität Bochum, pp. 24, 2000. (принята к публикации в J. Statist. Plann. Inference)

[17] Dette H., Melas V.B., Pepelyshev A.N. *D*-optimal designs for trigonometric regression models on a partial circle. Preprint, Ruhr-Universität Bochum, pp. 17, 2001. (Принята к публикации в Ann. of Inst. of Math. Stat.)

[18] Pepelyshev A.N. Locally optimal designs for the Monod model. // Proc. of the 4th St.Petersburg Workshop on Simulation. СПб, Изд-во НИИ Химии СПбГУ. с. 379-385. 2001.