

Задача №5

Пусть X_1, \dots, X_n — набор независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Обозначим через $F_n(x)$ эмпирическую функцию распределения для X_1, \dots, X_n , т.е.:

$$F_n(x) = \frac{\#\{i : X_i < x\}}{n}.$$

Введем величину A_n^2 (так называемую статистику критерия Андерсона-Дарлинга):

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x).$$

Продемонстрируйте выполнение *теоремы Дарлинга*:

1. Величина A_n^2 имеет предельное распределение при $n \rightarrow \infty$.
2. Асимптотическое распределение величины A_n^2 не зависит от функции распределения $F(x)$.

Указание: В силу «ступенчатости» функции $F_n(x)$ выражение для A_n^2 можно переписать в виде

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j - 1) [\log F(X_{[j;n]}) + \log(1 - F(X_{[n-j+1;n]}))],$$

где $X_{[j;n]}$ — выборка X_1, \dots, X_n , упорядоченная по возрастанию:

$$X_{[1;n]} < X_{[2;n]} < \dots < X_{[n;n]}.$$