Задача №8

Пусть X_i, ..., X_n — набор независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих нормальное распределение. Обозначим через S и K выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{(\sigma^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{(\sigma^2)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^{2}},$$

где μ_3, μ_4 — третий и четвертый выборочный центральный момент, соответственно. $\bar{X}$ — выборочное среднее, а σ^2 — выборочный второй центральный момент (то есть, выборочная дисперсия).

Введем величину JB (так называемую *статистику критерия Jarque-Bera*):

$$JB = \frac{n}{6}\left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right).$$

Продемонстрируйте выполнение следующих фактов:

1. Величина JB имеет при $n \to \infty$ распределение χ^2 с двумя степенями свободы.

2. Если распределение X_1, ..., X_n отлично от нормального, то величина JB неограничено возрастает с ростом n (так называемое свойство *асимптотической мощности 1*).