

Задача №4

Пусть X_1, \dots, X_n — набор независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$. Обозначим через $F_n(x)$ эмпирическую функцию распределения для X_1, \dots, X_n , т.е.:

$$F_n(x) = \frac{\#\{i : X_i < x\}}{n}.$$

Введем величину W_n^2 (так называемую *статистику критерия Крамера-Смирнова-фон Мизеса*):

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 dF(x).$$

Продемонстрируйте выполнение *теоремы Смирнова*:

1. Величина W_n^2 имеет предельное распределение при $n \rightarrow \infty$.
2. Асимптотическое распределение величины W_n^2 не зависит от функции распределения $F(x)$.

Указание: В силу «ступенчатости» функции $F_n(x)$ выражение для W_n^2 можно переписать в виде

$$W_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n \left[F(X_{[j;n]}) - \frac{2j-1}{2n} \right]^2,$$

где $X_{[j;n]}$ — выборка X_1, \dots, X_n , упорядоченная по возрастанию:

$$X_{[1;n]} < X_{[2;n]} < \dots < X_{[n;n]}.$$