

Задача №7

Пусть X_1, \dots, X_n — набор независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределение $F(x)$. Обозначим через $F_n(x)$ эмпирическую функцию распределения для X_1, \dots, X_n , т.е.:

$$F_n(x) = \frac{\#\{i : X_i < x\}}{n}.$$

Для $0 \leq a \leq 1$ введем величины R_n^+, R_n^-, R_n (так называемые статистики критерия Ренъи):

$$\begin{aligned} R_n^+ &= \sup_{F(x) \geq a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}; \\ R_n^- &= - \inf_{F(x) \geq a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}; \\ R_n &= \sup_{F(x) \geq a} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)}. \end{aligned}$$

Продемонстрируйте выполнение теоремы Ренъи:

1. Величина R_n имеет предельное распределение при $n \rightarrow \infty$.
2. Асимптотическое распределение величины R_n не зависит от функции распределения $F(x)$.
3. Имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{na}{1-a}} R_n^+ < x \right\} = 2\Phi(x) - 1,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального распределения.