Гильбертово пространство —- (полное) линейное пространство со скалярным произведением. Например, это обычное евклидово пространство векторов, в котором обычное скалярное произведение $\langle X, Y\rangle = \sum_i x_i y_i$. Также, можно задать положительные веса w_i и рассмотреть взвешенное скалярное произведение $\langle X, Y\rangle = \sum_i w_i x_i y_i$. Получится другое гильбертово пространство из векторов с весами.

Посмотрим на векторы с другой стороны. Пусть $M = \{1, \ldots, L\}$ – множество чисел от 1 до L. Тогда вектор X можно рассматривать как отображение, заданное на M, со значениями в $\mathbb{R}$, так как компоненту вектора x_i можно рассматривать как результат применения отображения X к i: $X(i) = x_i$.

Посмотрим на евклидово скалярное произведение с другой стороны. Для этого нам понадобится понятие интеграла по мере. Зададим меру μ на M: $\mu(\{i\}) = w_i > 0$. Тогда интегралом по дискретной мере от функции является сумма $\int_M f(i)\mu(d\,i) = \sum f(i)w_i$. Вообще, интеграл по мере $\int_D f(x)\mu(d\,x)$ определяется в общем случае. Если мера дискретная (как выше), то интеграл превращается в сумму. Если D — все $\mathbb{R}$ (или его интервал), а $\mu(dx) = w(x)dx$, где $w(x) > 0$, то $\int_D f(x)\mu(d\,x) = \int_D f(x)w(x)d\,x$, т.е. обычный интеграл.

Через введенное понятие интеграла по мере можем записать

$$\langle X, Y\rangle = \int_M X(i)Y(i)\mu(d\,i) = \sum_i w_i x_i y_i.$$

Теперь построим следующую конструкцию. Пусть (D, μ) — измеримое пространство (там еще должна быть сигма-алгебра, где задана мера, но мы ее опустим). Рассмотрим гильбертово пространство функций $L^2(D, \mu)$, заданных на (D, μ), со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_D f_1(x)f_2(x)\mu(d\,x).$$

В это пространство входят не все функции, а только те, чьи нормы конечны, т.е. $||f||^2 = \langle f, f\rangle < \infty$.

Задание 1: какое должно быть пространство D и какая должна быть мера μ, чтобы $L^2(D, \mu)$ было обычным евклидовым пространством из векторов с обычным скалярным произведением?

Итак, мы умеем задавать вектора как функции и их скалярное произведение как интеграл по мере.

Теперь пусть у нас есть два гильбертовых пространства функций, заданных на (D_1, μ_1) и (D_2, μ_2). Обозначим их $L_1 = L^2(D_1, \mu_1)$ и $L_2 = L^2(D_2, \mu_2)$. Соответствующие скалярные произведения будем обозначать $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, а нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$.

Например, $D_1 = M_1 = \{1, \ldots, L\}$ и $D_2 = M_2 = \{1, \ldots, K\}$, $\mu_1(\{i\}) = 1$ для всех $i = 1, \ldots, L$ и $\mu_2(\{j\}) = 1$ для всех $j = 1, \ldots, K$ (меры, которые каждому значению дают вес 1, называются считающими). Тогда L_1 — обычное пространство векторов длины L и L_2 — пространство векторов длины K, со стандартным евклидовым скалярным произведением.

Перед тем как читать дальше, убедитесь, что вам понятно все, о чем написано выше.

Теперь зададим отображение $\mathbb{G}$ из L_2 в L_1: $\mathbb{G} : L_2 \to L_1$. На вход $\mathbb{G}$ поступает функция из L_2, а на выходе получается функция из L_1.

Например, если $D_1 = M_1$, $D_2 = M_2$ и L_1, L_2 — пространства векторов, то $\mathbb{G}$ — линейное отображение, которое вектор длины K переводит в вектор длины L. В качестве

$\mathbb{G}$ можно взять отображение, которое задается умножением на матрицу $\mathbf{G}$ размера L на K. Действительно, если $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{L\times K}$, $X \in \mathbb{R}^K$, то $\mathbf{G}X = Y \in \mathbb{R}^L$.

Теперь введем сопряженное отображение $\mathbb{G}^* :\ L_1 \to L_2$ такое, что $\langle f, \mathbb{G}h\rangle_1 = \langle \mathbb{G}^* f, h\rangle_2$, где $f \in L_1$, $h \in L_2$.

Задание 2. Покажите, что в случае пространств векторов и считающих мер, когда действие оператора $\mathbb{G}$ — это умножение на матрицу $\mathbf{G}$, $\mathbb{G}^*$ — это умножение на транспонированную матрицу $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$.

Оператор $\mathbb{G}$, по определению, задается ядром $g(x, s)$ и действует как

$$(\mathbb{G}h)(x) = \int_{D_2} g(x, s)h(s)\mu_2(ds).$$

Требуется, чтобы $\int_{D_1}\int_{D_2} g(x, s)^2\mu_1(dx)\mu_2(ds)$ был конечен. В случае функций-векторов ($D_1 = M_1$, $D_2 = M_2$), здесь ничего страшного нет: $g(x, s)$ — это просто элементы матрицы, интеграл (сумма) всегда конечен, h — вектор, действие оператора — обычное (если мера считающая) произведение матрицы на вектор. Такой оператор в общем случае называется оператором Гильберта-Шмидта. Можно думать о нем как об обобщении оператора-матрицы, переводящей умножением вектор в вектор.

Задание 3: написать, как действует оператор $\mathbb{G}$ на вектор, если меры не обязательно считающие. Например, $\mu_1(\{i\}) = w_i$, $\mu_2(\{j\}) = q_j$.

Далее рассматриваются отображения $\mathbb{G}\mathbb{G}^* : L_1 \to L_1$ и $\mathbb{G}^*\mathbb{G} : L_2 \to L_2$.

Ядро оператора $\mathbb{G}\mathbb{G}^*$ выглядит следующим образом (не пугайтесь, в случае матриц это просто перемножение матриц, но если мера не считающая, то получается похитрее): $g_{11}(x, y) = \int_{D_2} g(x, s)g(y, s)\mu_2(ds)$.

Задание 4: выпишите в случае, когда $D_1 = M_1$, $D_2 = M_2$, $g(i, j)$ — элементы матрицы $L \times K$, чему равно $\mathbb{G}\mathbb{G}^*Y$, где $Y \in \mathbb{R}^L$, если меры не обязательно считающие: $\mu_1(\{i\}) = w_1$, $\mu_2(\{j\}) = q_j$.

У каждого из этих операторов есть не более чем счетное число ненулевых (положительных) собственных чисел и соответствующих собственных функций (определяются так же, как для матриц). Обозначим ортонормированную систему собственных функций оператора $\mathbb{G}\mathbb{G}^*$ как $\{\phi_n\}, \phi_n \in L_1$, ортонормированную систему собственных функций оператора $\mathbb{G}^*\mathbb{G}$ как $\{\psi_n\}, \psi_n \in L_2$. Известно, что им соответствуют одни и те же собственные числа $\{\lambda_n\}$, и что $\psi_n = \mathbb{G}^*\phi_n/\sqrt{\lambda_n}$, $\phi_n = \mathbb{G}\psi_n/\sqrt{\lambda_n}$. Ортогональность означает, как обычно, равенство нулю скалярного произведения, а нормированность — равенство единице нормы. Как скалярное произведение, так и норма, зависят от мер, заданных в соответствующих подпространствах.

Обращаю внимание, что для операторов $\mathbb{G}$, заданных одним и тем же ядром g, собственные числа и вектора могут различаться, если меры в пространствах заданы разные.

Основной результат про разложение Шмидта ядра оператора $\mathbb{G}$:

$$g(x, s) = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\phi_n(x)\psi_n(s).$$

Задание 5: Покажите, что если $g(i, j)$ — элементы матрицы $\mathbf{G}$ размера $L \times K$, меры считающие ($\mu_1(\{i\}) = 1$, $\mu_2(\{j\}) = 1$), то разложение Шмидта ядра оператора $\mathbb{G}$ — это в точности сингулярное разложение матрицы $\mathbf{G}$.