Задача №7

Пусть $X_i, \ldots, X_n$ — набор независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределение $F(x)$. Обозначим через $F_n(x)$ эмпирическую функцию распределения для $X_1,\ldots,X_n$, т.е.:

$$F_n(x) = \frac{\#\left\{i : X_i < x\right\}}{n}.$$

Для $0 \leqslant a \leqslant 1$ введем величины R_n^+, R_n^-, R_n (так называемые статистики критерия Реньи):

$$R_n^+ = \sqrt{n} \sup_{F(x) \geqslant a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)};$$

$$R_n^- = -\sqrt{n} \inf_{F(x) \geqslant a} \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)};$$

$$R_n = \sqrt{n} \sup_{F(x) \geqslant a} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{F(x)}.$$

Продемонстрируйте выполнение теоремы Реньи:

1. Величина R_n имеет предельное распределение при $n \to \infty$.

2. Асимптотическое распределение величины R_n не зависит от функции распределения $F(x)$.

3. Имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{a}{1-a}} R_n^+ < x \right\} = 2\Phi(x) - 1,$$

   где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального распределения.