Задача №5

Пусть $X_i, \ldots, X_n$ — набор независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределение $F(x)$. Обозначим через $F_n(x)$ эмпирическую функцию распределения для $X_1,\ldots,X_n$, т.е.:

$$F_n(x) = \frac{\#\left\{i : X_i < x\right\}}{n}.$$

Введем величину A_n^2 (так называемую статистику критерия Андерсона-Дарлинга):

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[F_n(x) - F(x)\right]^2}{F(x)\left(1 - F\left(x\right)\right)}\, dF(x).$$

Продемонстрируйте выполнение теоремы Дарлинга:

1. Величина A_n^2 имеет предельное распределение при $n \to \infty$.

2. Асимптотическое распределение величины A_n^2 не зависит от функции распределения $F(x)$.

Указание: В силу «ступенчатости» функции $F_n(x)$ выражение для A_n^2 можно переписать в виде

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (2j-1) \left[\log F\left(X_{[j;n]}\right) + \log\left(1 - F\left(X_{[n-j+1;n]}\right)\right)\right],$$

где $X_{[j;n]}$ — выборка $X_i, \ldots, X_n$, упорядоченная по возрастанию:

$$X_{[1;n]} < X_{[2;n]} < \cdots < X_{[n;n]}.$$