ПРОГРАММА КУРСА

"УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"

для специальности 010501 (экзамен, зима 2011/2012 уч.г.)

Интегральные операторы с непрерывным ядром. Операторы со слабой особенностью в пространстве $L_p(\Omega)$. Равномерная сходимость интеграла. Оператор со слабой особенностью в пространстве $C(\overline{\Omega})$. Компактность оператора со слабой особенностью в $L_p(\Omega)$ и в $C(\overline{\Omega})$. Непрерывность решения уравнения со слабой особенностью.

Потенциалы и их простейшие свойства. Объемный потенциал и его свойства. Поверхности класса C^2 и их свойства. Интеграл Гаусса и его значение. Абсолютная сходимость интеграла Гаусса. Свойства потенциала двойного слоя. Непрерывность потенциала простого слоя во всем пространстве. Нормальная производная потенциала простого слоя (равномерная сходимость интеграла – б/д). Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. Исследование интегральных уравнений теории потенциала. Решение внешней задачи Дирихле. Существование и свойства функции Грина для области с границей класса C^2. Собственные числа и собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа (существование ПНП - б/д; док-во гладкости решения интегрального уравнения*).

Лемма Дюбуа-Раймона. Обобщенные производные по Соболеву. Примеры. Пространство $W_p^1(\Omega)$ и его полнота. Пространство $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ и его свойства. Неравенство Соболева для $p = 1$ (док-во*). Общее неравенство Соболева. Неравенство Фридрихса и эквивалентная норма в $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$. Теорема о продолжении функций из $W_p^1(\Omega)$ (б/д). Неравенство Соболева в $W_p^1(\Omega)$. Теорема Реллиха. Общая теорема вложения при $p < n$. Теорема вложения при $p > n$ (док-во*). О точности теорем вложения*.

Обобщенное решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения. Теорема существования о.р. для уравнения Пуассона. Пространство $W_2^{-1}(\Omega)$. Энергетическое пространство задачи Дирихле. Сведение з.Д. к операторному уравнению в энергетическом пространстве. Компактность оператора T. Теорема существования о.р. задачи Дирихле. Теоремы единственности для задачи Дирихле. Задача Дирихле с неоднородными краевыми условиями. Вторые производные обобщенных решений (док-во*). Задача Неймана. Обобщенное решение. Энергетическое пространство. Сведение задачи к операторному уравнению. Свойства оператора T. Теорема существования о.р. задачи Неймана. Лемма: если $\nabla u = 0$, то $u = const$. Теоремы единственности для задачи Неймана. Абстрактная схема метода Галеркина. Вариационно-разностный метод для краевых задач. Собственные числа и обобщенные собственные функции задачи Дирихле. Ряды Фурье по обобщенным собственным функциям. Вариационный принцип для собственных чисел. Простота первого с.ч. задачи Дирихле для оператора Лапласа*. Метод Галеркина – Ритца для собственных значений. Пространство $W_p^1(a, b)$. Задача Штурма – Лиувилля и ее решение. Задача Дирихле для полулинейного уравнения. Теорема существования решения. Теорема несуществования решения (док-во*).

Абстрактные функции вещественной переменной. Обобщенное решение начально-краевой задачи для параболического уравнения. Метод Фурье решения н.-кр.з. для параболического уравнения. Обоснование метода Фурье (с док-вом сходимости двух рядов). Стабилизация решения при $t \to \infty$. Классическая разрешимость н.-кр.з. для параболического уравнения в случае $n = 1$. Обобщенное решение начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Метод Фурье решения н.-кр.з. для гиперболического уравнения. Обоснование метода Фурье (с док-вом сходимости одного из рядов). Классическая разрешимость н.-кр.з. для гиперболического уравнения в случае $n = 1$.

Теоремы Фредгольма и Гильберта – Шмидта (б/д).