Оценки методом максимального правдоподобия

Anton Korobeynikov
anton@korobeynikov.info

20 февраля 2020 г.

В каждом варианте описано распределение случайной величины Y. Задание можно разделить на несколько частей:

- Моделирование выборки из n независимых реализаций Y.
- Написание функции правдоподобия.
- Написание процедуры оценивания параметров (с учетом естественных ограничений на область допустимых значений параметров).
- Исследование указанных свойств оценок оценок параметров.

1. Случайная величина Y имеет распределение Коши (с параметрами сдвига и масштаба). Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
2. Случайная величина Y имеет F-распределение. Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
3. Случайная величина Y имеет логистическое распределение. Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
4. Случайная величина Y имеет логнормальное распределение. Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
5. Случайная величина Y имеет распределение Пуассона с параметром сдвига μ (т.е. $Y - \mu$ имеет обычное распределение Пуассона). Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
6. Случайная величина Y имеет t-распределение (нецентральное). Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
7. Случайная величина Y имеет бета-распределение. Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
8. Случайная величина Y имеет распределение хи-квадрат (нецентральное). Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
9. Случайная величина Y имеет негативное биномиальное распределение. Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
10. Случайная величина Y имеет распределение Парето. Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.
11. Случайная величина Y имеет экспоненциальное распределение с параметром сдвига μ (т.е. $Y - \mu$ имеет обычное экспоненциальное распределение). Исследуйте состоятельность и скорость сходимости оценок параметров.

12. Случайная величина Y имеет бета-распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

13. Случайная величина Y имеет геометрическое распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

14. Случайная величина Y имеет распределение хи-квадрат (нецентральное). Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

15. Случайная величина Y имеет негативное биномиальное распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

16. Случайная величина Y имеет распределение Пуассона с параметром сдвига μ (т.е. $Y - \mu$ имеет обычное распределение Пуассона). Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

17. (Цензурирование справа) Пусть X — с.в. с функцией распределения $F(x)$. C — некоторая константа. Положим $Y = \min(X, C)$.

    Случайная величина X имеет распределение Вейбулла. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

18. (Цензурирование слева) Пусть X — с.в. с функцией распределения $F(x)$. C — некоторая константа. Положим $Y = \max(X, C)$.

    Случайная величина X имеет распределение Вейбулла. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

19. (Случайное цензурирование справа) Пусть X — с.в. с функцией распределения $F(x)$. T — с.в. с некоторой (неизвестной) функцией распределения $G(x)$. X и T независимы. Положим $Y = (\min(X, T), \delta)$, где δ — индикатор события $\{X < T\}$.

    Случайная величина X имеет негативное биномиальное распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

20. (Случайное цензурирование слева) Пусть X — с.в. с функцией распределения $F(x)$. S — с.в. с некоторой (неизвестной) функцией распределения $G(x)$. X и S независимы. Положим $Y = (\max(X, S), \delta)$, где δ — индикатор события $\{X > T\}$.

    Случайная величина X имеет негативное биномиальное распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

21. (Двойное цензурирование) Пусть X — с.в. с функцией распределения $F(x)$. $U < V$ — с.в. с некоторой (неизвестной) совместной функцией распределения $G(u, v)$. X и (U, V) независимы. Положим $Y = (\max(U, \min(X, V)), \delta_1, \delta_2)$, где δ_1 — индикатор события $\{X < U\}$, δ_2 — индикатор события $\{X < V\}$.

    Случайная величина X имеет гамма-распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

22. (Интервальное цензурирование первого типа) Пусть X — с.в. с функцией распределения $F(x)$. T — с.в. с некоторой (неизвестной) функцией распределения $G(x)$. X и T независимы. Положим $Y = (T, \delta)$, где δ — индикатор события $\{X < T\}$.

    Случайная величина X имеет гамма-распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

23. (Интервальное цензурирование второго типа) Пусть X — с.в. с функцией распределения $F(x)$. $U < V$ — с.в. с некоторой (неизвестной) совместной функцией распределения $G(u, v)$. X и

(U, V) независимы. Положим $Y = (U, V, \delta_1, \delta_2)$, где δ_1 — индикатор события $\{X < U\}$, δ_2 — индикатор события $\{X < V\}$.

Случайная величина X имеет логнормальное распределение. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.

24. (Интервальное цензурирование смешанного типа) Пусть K — положительная целочисленная случайная величина. Обозначим через T набор случайных величин $\{T_{k,j}, j = 1 \dots k, k = 1 \dots, +\infty\}$, таких, что $0 = T_{k,0} < T_{k,1} < T_{k,2} < \dots < T_{k,k} < T_{k,k+1} = +\infty$. Всюду далее будем предполагать, что случайные величины X и (K, T) независимы. Определим случайную величину $Y = (\Delta_K, T_K, K)$, где T_k — k-я строка треугольного массива T, $\Delta_k = (\Delta_{k,1}, \dots, \Delta_{k,k+1})$ и $\Delta_{k,j}$ — индикатор события $X \in (T_{k,j-1}, T_{k,j}]$. Таким образом, Y описывает разбиение вещественной полуоси $[0, +\infty)$ на $K + 1$ (случайный) подинтервал и определяет интервал, содержащий X.

    Например, можно положить

$$T_{k,j} = \sum_{i=1}^{j} Z_i, \quad K = \sup_{j \geqslant 1} \left\{ \sum_{i=1}^{j} Z_i < L \right\}.$$

    Здесь L — некоторая константа, а Z_i — независимые одинаково распределенные случайные величины.

    Случайная величина X имеет распределение Вейбулла. Исследуйте зависимость ширины доверительного интервала для оценок параметров от объема выборки.