Некоторые задачи, связанные с разделимостью гармоник

Ельник Сергей Игоревич, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Некруткин В.В.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Голяндина Н.Э.

Санкт-Петербург
2015г.

Постановка задачи: ряды

Рассматриваемые ряды:

- Сигнал: $f_n = A\cos(2\pi\omega_1 n); \quad \omega_1 \in (0, 1/2)$.
- Помеха: $e_n = \cos(2\pi\omega_2 n);\ \ \omega_2 \in (0, 1/2),\ \ \omega_2 \neq \omega_1$.
- Наблюдаемый ряд: $x_n = f_n + \delta e_n$.

Постановка задачи: SSA, восстановление сигнала

Basic SSA. Цель: восстановление сигнала f_n.

- **Вложение:**
  $1 < L < N$ — длина окна, $K = N - L + 1$

  $$\mathrm{X}_N = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \longleftrightarrow \mathbf{H}(\delta) = [X_1 : X_2 : \ldots : X_K],$$

  где $X_i = (x_{i-1}, \ldots, x_{i+L-2})^{\mathrm{T}}$.
- **Сингулярное разложение:** $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 + \mathbf{H}_4$.
- **Группировка:** $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta) = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$.
- **Диагональное усреднение:** $\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) = \mathcal{S}\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$.

Максимальная ошибка восстановления исходного сигнала:

$$\|\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N\|_{\max} = \max_{0 \le n \le N-1} |\widetilde{f}_n(\delta) - f_n|.$$

Постановка задачи: сходимость и выбор параметров

Проблемы.

- **Практика** — ошибки восстановления стремятся к нулю при $L, K \to \infty$ и $|\delta| < A$. Не доказано.

  Задача — доказать сходимость при некоторых (возможно, более сильных) ограничениях.

- Есть **практические рекомендации** по выбору L, K, чтобы ошибки восстановления были меньше. Строгого обоснования нет.

  Задача — обосновать.

Теория возмущений: основные обозначения

- $\mathrm{F}_N = (f_0, \ldots, f_{N-1})$ — сигнал: $f_n = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{n-k}$;
- $\mathbf{H}$ — траекторная (ганкелева) матрица сигнала размерности $L \times K$, где $N = K + L - 1$;
- $\min(L, K) > d =$ rank $\mathbf{H}$;
- $\mathbb{U}_0$ – собственное подпространство, соответствующее нулевому собственному числу;
- $\mathbb{U}_0^{\perp}$ — ортогональное дополнение $\mathbb{U}_0$; $\dim \mathbb{U}_0^{\perp} = d$;
- $\mathbf{P}_0^{\perp}$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^{\perp}$.

- $\mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_{N-1})$ — помеха;
- $\mathrm{F}_N(\delta) = \mathrm{F}_N + \delta \mathrm{E}_N$ — возмущенный сигнал, δ — формальный параметр возмущения;
- $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$;
- $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$ — линейное пространство, натянутое на d главных сингулярных векторов SVD матрицы $\mathbf{H}(\delta)$;
- $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^{\perp}(\delta)$.

В. В. Некруткин (2010)

- $\widetilde{\mathbf{H}}$ — сумма d первых элементарных матриц сингулярного разложения $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$.
- $\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) = \mathcal{S}\widetilde{\mathbf{H}}$ — восстановленный сигнал.

Ошибка восстановления траекторной матрицы:

$$\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \widetilde{\mathbf{H}} - \mathbf{H} = \left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\right)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}.$$

Максимальная ошибка восстановления исходного сигнала:

$$\|\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N\|_{\max} = \max_{0\le n\le N-1} |\widetilde{f}_n(\delta) - f_n| = \max_{0\le n\le N-1} \left|\mathcal{S}\left(\Delta_\delta(\mathbf{H})\right)_{[n]}\right|.$$

Нас интересует близость исходного и восстановленного сигналов при увеличении длины ряда $N \to \infty$.

Известная оценка для $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\|$

- $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$ — собственные числа матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$;
- $\mathbf{S}_0$ — псевдообратная матрица к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$,
- $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$

Теорема (В. В. Некруткин, 2010)

Если $\delta_0 > 0$ *и* $\left\|\mathbf{B}(\delta)\right\|/\mu_{\min} < 1/4$ *для любого* $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, *тогда*

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \le C\,\frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}\,.$$

Следствие

Для случая двух гармоник при L, $K \to \infty$

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| = O(L^{-1}) + O(K^{-1}).$$

Постоянная и гармоника: быстрая сходимость

Предложение (Н. Притыковская, 2011)

Пусть $f_n = 1$ *и* $e_n = \cos(2\pi\omega n)$ *с* $\omega \in (0, 1/2)$. *Тогда существуют такие последовательности* $L, K \to \infty$, *что*

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\| \le C(\delta_0)\,|\delta|\,\frac{1}{\sin \pi\omega}\,\left(K^{-2} + |\delta| L^{-2}\right).$$

при $|\delta| < \delta_0$.

Идея: L и K — знаменатели рациональных аппроксимаций ω (цепные дроби).

Результат: быстрая сходимость

Сигнал и шум: $f_n = A\cos(2\pi\omega_1 n)$, $e_n = \cos(2\pi\omega_2 n)$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

Теорема

Существуют такие последовательности $L, K \to \infty$, $\delta_0 > 0$ *и такая постоянная* $C(\delta_0)$, *что при* $|\delta| < \delta_0$

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\| \leq C(\delta_0)|\delta| \left(\frac{1}{\sin(\pi(\omega_1+\omega_2))} + \frac{1}{|\sin(\pi(\omega_1-\omega_2))|}\right) \cdot \left(K^{-3/2} + |\delta| C_7 L^{-3/2}\right).$$

Было: $O(L^{-1}) + O(K^{-1})$.

Идея выбора последовательностей L, K: совместное приближение

Используется результат Кронекера:

Предложение

Если хотя бы одно из вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ иррационально, то неравенствам

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < q^{-1-1/m}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

удовлетворяет бесконечное множество совокупностей чисел $p_1, \ldots p_m \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$.

$$m = 2; \quad \alpha_1 = \omega_1 + \omega_2, \quad \alpha_2 = |\omega_1 - \omega_2|; \quad q = L, K.$$

Точность аппроксимации сигнала

- Ошибка восстановления траекторной матрицы

$$\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \widetilde{\mathbf{H}} - \mathbf{H} = \left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\right)\mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}. \qquad (1)$$

- Ошибка восстановления временного ряда

$$\|\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N\|_{\max} = \max_{0\le n\le N-1} |\widetilde{f}_n(\delta) - f_n| \le \max_{\substack{1\le i\le L\\ 1\le j\le K}} \left|\Delta_\delta(\mathbf{H})_{[i,j]}\right| .$$

Исследование обоих слагаемых в сумме (1).

Анализ слагаемого $\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}$

Предложение

- *Если* $L, K \to \infty$, *то*

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(L^{-1})\,.$$

- *Существует такая последовательность* $L \to \infty$, *что при* $K \to \infty$

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(L^{-3/2})\,.$$

Анализ слагаемого $\left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right)\mathbf{H}(\delta)$

- Если $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|\|\mathbf{H}(\delta)\| \to 0$, то результат получен.
- Вообще говоря, это условие не выполняется.
- При выборе последовательностей $L, K \to \infty$

$$\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\|\|\mathbf{H}(\delta)\| = \left(\frac{1}{\sin(\pi(\omega_1+\omega_2))} + \frac{1}{|\sin(\pi(\omega_1-\omega_2))|}\right) \cdot$$
$$\cdot\left(O(L^{1/2}K^{-1}) + O(L^{-1}K^{1/2})\right).$$

Итоговый результат

Сигнал и помеха: $f_n = A\cos(2\pi\omega_1 n)$, $e_n = \cos(2\pi\omega_2 n)$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

Теорема

Если $\omega_1 \notin \mathbb{Q}$ или $\omega_2 \notin \mathbb{Q}$, то при $|\delta| < \delta_0$ можно выбрать такие последовательности $L \asymp N$ и $K \asymp N$, что

$$\|\widetilde{\mathrm{F}}_N(\delta) - \mathrm{F}_N\|_{\max} = \left(\frac{1}{\sin(\pi(\omega_1+\omega_2))} + \frac{1}{|\sin(\pi(\omega_1-\omega_2))|}\right) O(N^{-1/2}).$$

$$A = 3,\ \omega_1 = \pi - 3,\ \omega_2 = e - 2.6;$$
$$f_n = A\cos(2\pi\omega_1 n),\ e_n = \cos(2\pi\omega_2 n);$$
$$N = 59, \ldots, 4999;\ \ L = K = (N+1)/2.$$

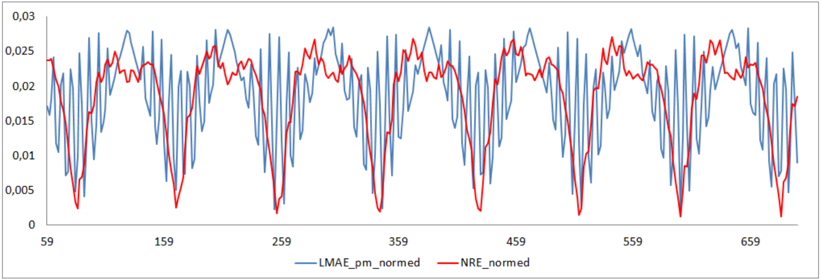

Рис. : Ошибки восстановления и рациональной аппроксимации

Основные результаты

- Доказан результат о сходимости ошибок восстановления сигнала при специальном выборе последовательностей L, K в случае, когда и сигнал, и помеха являются гармониками.

- Подтверждены практические рекомендации по выбору L, K, при которых уменьшается ошибка восстановления — аппроксимация ω_1, ω_2.

- Рациональная аппроксимация $\omega_1 \pm \omega_2$ приводит к лучшим результатам, чем аппроксимация ω_1, ω_2.

Вычислительный эксперимент

$$A = 3,\ \omega_1 = \pi - 3,\ \omega_2 = e - 2.6;$$
$$f_n = A\cos(2\pi\omega_1 n),\ e_n = \cos(2\pi\omega_2 n);$$
$$N = 59, \ldots, 4999;\ L = K = (N+1)/2.$$

Таблица : Частоты малых ошибок восстановления при хороших рациональных приближениях

NRE \ LMAE	$\mathbf{0.05};\ \omega_{1,2}$	$\mathbf{0.05};\ \omega_1 \pm \omega_2$
0.1	0.4274	0.4677
0.15	0.5968	0.7097
0.2	0.7177	0.9274

NRE — нормированная максимальная ошибка восстановления сигнала.
LMAE — нормированная максимальная ошибка рациональной аппроксимации.