Общие компоненты временных рядов

Чёрный Артём Константинович, 422 гр.

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. Голяндина Н. Э.

Рецензент: ассистент Шлемов А. Ю.

Санкт-Петербург, 2015

Общая постановка задачи

- Временной ряд $\mathsf{X} = (x_1, \ldots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$.
- Система временных рядов $(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m)$, длина каждого ряда равна N, $\mathsf{X}_k = \mathsf{F}_k + \mathsf{R}_k$, где F_k — интересующая нас компонента ряда, R_k — остаток.

Задача

Выделить из системы рядов $(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m)$ компоненту $(\mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_m)$;

Известные методы:

- Singular Spectrum Analysis (SSA);
- Multivariate Singular Spectrum Analysis (MSSA).

Задачи данной работы:

- Построение новых модификации метода MSSA JointSSA и Simultaneous Components Analysis (SCA-SSA);
- Исследование свойств новых классов модификаций;
- Численное сравнение результатов.

Основные определения. Траекторная матрица

Определение

Траекторной матрицей временного ряда $\mathsf{X} = (\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_N)$ называется матрица

$$\mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} \mathsf{x}_1 & \mathsf{x}_2 & \cdots & \mathsf{x}_K \\ \mathsf{x}_2 & \mathsf{x}_3 & \cdots & \mathsf{x}_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{x}_L & \mathsf{x}_{L+1} & \cdots & \mathsf{x}_N \end{pmatrix},$$

где $L, 1 < L < N$ — *длина окна*, $K = N - L + 1$.

- Вложение:
  временные ряды $\mapsto$ матрица

$$\mathcal{T} \colon \mathbb{R}^{N \times m} \to \mathbb{R}^{L \times mK}$$

$$\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m \mapsto [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_m].$$

- Диагональное усреднение:
  матрица $\mapsto$ временные ряды

$$\mathcal{T}^{-1}\mathcal{H} \colon \mathbb{R}^{L \times mK} \to \mathbb{R}^{N \times m}$$

$$[\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_m] \mapsto \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m.$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,K} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,K} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdots & x_{3,K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{L,1} & x_{L,2} & x_{L,3} & \cdots & x_{L,K} \end{pmatrix}$$

Рис. Диагональное усреднение

Определение

L — длина окна, $\mathbf{X} = \mathcal{T}(\mathsf{X})$.
Ряд X имеет L-ранг d, если $\operatorname{rk}\mathbf{X} = d$.
Ряды, для которых L-ранг равен d для любого допустимого L, называются рядами конечного ранга.
Обозначение для ранга ряда: $\operatorname{rk}\mathsf{X}$.

Пример: $\mathsf{x}_n = \sum_i p_i(n) e^{\alpha_i n} \cos(2\pi\omega_i n + \varphi_i)$, где $p_i(n) = \sum_k a_{ik} n^k$.

Определение

$\mathbf{X}_k = \mathcal{T}(\mathsf{X}_k)$, $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \ldots : \mathbf{X}_m]$.
Система временных рядов $\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m$ имеет L-ранг d, если $\operatorname{rk}\mathbf{X} = d$.
Обозначение для ранга системы рядов: $\operatorname{rk}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$.

Фиксируем $r \le L$. Обозначим:

$$\mathcal{D}_r \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{r\times r} : \mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r),\ d_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, r\},$$

$$\mathcal{O}_{L,r} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{L\times r} : \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}_r\},$$

$$\mathcal{P}_{L,r} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{L\times L} : \mathbf{P}^2 = \mathbf{P},\ \operatorname{Im}\mathbf{P} \perp \operatorname{Ker}\mathbf{P},\ \operatorname{rk}\mathbf{P} = r\}.$$

Вход: Система временных рядов $(\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m)$, $\mathsf{X}_k = \mathsf{F}_k + \mathsf{R}_k$, длина каждого ряда равна $N > 2$. Параметры: длина окна L, степень аппроксимации r.
Выход: оценка F_k.

1. *Вложение* $(\mathcal{T})$

$$\mathsf{X}_k \mapsto \mathbf{X}_k \in \mathbb{R}^{L\times K},\ K = N - L + 1,\ k = 1, \ldots, m;$$
$$(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_m) \mapsto \mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_m] \in \mathbb{R}^{L\times mK}.$$

2. *Поиск ортонормированной системы векторов*
Поиск $\mathbf{U}^{(r)} = [U_1^{(r)} : \ldots : U_r^{(r)}] \in \mathcal{O}_{L,r}$, зависящий от $\mathbf{X}_k, k = 1, \ldots, m$.
3. *Группировка и проектирование*
Выбор группы индексов $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, r\}$

$$\mathbf{U}_I^{(r)} = [U_{i_1}^{(r)} : \ldots : U_{i_n}^{(r)}] \mapsto \mathbf{P}_I^{(r)} = \mathbf{U}_I^{(r)} \left(\mathbf{U}_I^{(r)}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{P}_{L,n},$$
$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{P}_I^{(r)} \mathbf{X}_k,\ k = 1, \ldots, m.$$

4. *Диагональное усреднение и переход к рядам* $(\mathcal{T}^{-1}\mathcal{H})$

$$\hat{\mathsf{F}}_k = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{H}(\mathbf{Y}_k) \text{ — оценка } \mathsf{F}_k, k = 1, \ldots, m.$$

Определение (Сингулярное разложение)

Сингулярным разложением матрицы $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times M}$ ранга d называется разложение

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,d}$, $\mathbf{V} \in \mathcal{O}_{M,d}$, $\mathbf{\Lambda} \in \mathcal{D}_d$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_d > 0$.

MSSA: $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$, $\mathbf{U}^{(r)} = [U_1 : \ldots : U_r]$, $\mathbf{U}_I^{(r)} = [U_{i_1} : \ldots : U_{i_n}]$.

Определение (Преемственность задачи)

Рассмотрим некоторую задачу поиска ортонормированной системы $\mathbf{U}^{(r)} \in \mathcal{O}_{L,r}$, зависящую от параметра $r \leq L$. Будем говорить, что задача обладает преемственностью, если для любых r_1 и r_2, $r_2 > r_1$ существуют решения такие, что

$$\operatorname{colspan}\left(\mathbf{U}^{(r_1)}\right) \subset \operatorname{colspan}\left(\mathbf{U}^{(r_2)}\right).$$

Таким образом, задача нахождения $\mathbf{U}^{(r)}$ в методе MSSA обладает преемственностью.

$\mathbf{X}_k = \mathcal{T}(\mathsf{X}_k)$, $\mathbf{S}_k = \mathbf{X}_k\mathbf{X}_k^{\mathrm{T}}$, $k = 1, \ldots, m$, $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \ldots : \mathbf{X}_m]$.
$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$ - сингулярное разложение, $\mathbf{U}^{(r)} = [U_1 : \ldots : U_r]$.

Оптимальные свойства:

$$\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^{\mathrm{T}}\|^2 \to \min_{\mathbf{U},\mathbf{D}_k,\mathbf{V}_k}, \tag{1}$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} \mathbf{S}_k - \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right\|^2 \to \min_{\mathbf{U},\mathbf{D}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}$, $\mathbf{D}, \mathbf{D}_k \in \mathcal{D}_r$, $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1^{\mathrm{T}} : \ldots : \mathbf{V}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathcal{O}_{mK,r}$.

Свойства:

- Минимум функционалов для рядов конечного ранга при $r \geq \mathrm{rk}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$ равен нулю.
- Минимум функционалов равен нулю тогда и только тогда, когда восстановление точное, т.е. $\mathbf{P}^{(r)}\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k$, где $\mathbf{P}^{(r)} = \mathbf{U}^{(r)}\left(\mathbf{U}^{(r)}\right)^{\mathrm{T}}$;
- Преемственность.
- При $m = 1$ совпадает с методом SSA.

Новые способы поиска матрицы $\mathbf{U}$

$\mathbf{X}_k = \mathcal{T}(\mathsf{X}_k)$, $\mathbf{S}_k = \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^{\mathrm{T}}$, $k = 1, \ldots, m$.

$$\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{Z}_k\|^2 \to \min_{\mathbf{Z}_k \in \mathbf{\Psi}}, \quad \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{S}_k - \mathbf{\Sigma}_k\|^2 \to \min_{\mathbf{\Sigma}_k \in \mathbf{\Phi}}.$$

- MSSA:

$$\mathbf{\Psi}_{\mathsf{MSSA}} : \mathbf{Z}_k = \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}$, $\mathbf{D}_k \in \mathcal{D}_r$, $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1^{\mathrm{T}} : \ldots : \mathbf{V}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathcal{O}_{mK,r}$.

- Covariance Orthogonal Dimensionality Reduction (CODR):

$$\mathbf{\Phi}_{\mathsf{CODR}} : \mathbf{\Sigma}_k = \mathbf{U}\mathbf{T}_k\mathbf{U}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}$, $\mathbf{T}_k \in \mathbb{R}^{r \times r}$ — неотрицательно определенные, $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}_k^{\mathrm{T}}$.

- Diagonal Orthogonal Dimensionality Reduction (DODR):

$$\mathbf{\Phi}_{\mathsf{DODR}} : \mathbf{\Sigma}_k = \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{U}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}$, $\mathbf{D}_k \in \mathcal{D}_r$.

- Orthogonal Simultaneous Components Analysis (O-SCA):

$$\mathbf{\Psi}_{\mathsf{O\text{-}SCA}} : \mathbf{Z}_k = \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}$, $\mathbf{D}_k \in \mathcal{D}_r$, $\mathbf{V}_k \in \mathcal{O}_{K,r}$.

Группировка:

- Выбор $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, r\}$, $n \leq r$.
- Проектирование и переход к рядам:

$$\mathbf{U}^{(r)} = [U_1^{(r)} : \ldots : U_r^{(r)}] \mapsto \mathbf{U}_I^{(r)} = [U_{i_1}^{(r)} : \ldots : U_{i_n}^{(r)}] \mapsto \mathbf{P}_I^{(r)} = \mathbf{U}_I^{(r)} \left(\mathbf{U}_I^{(r)}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\mathsf{F}}_k = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{H}\mathbf{P}_I^{(r)}\mathcal{T}\mathsf{X}_k.$$

Для выполнения группировки нужно упорядочить столбцы $\mathbf{U}^{(r)}$.
Если $\mathbf{U} = [U_1 : \ldots : U_r] \in \mathcal{O}_{L,r}$, то выполнено

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|U_i^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\|^2 + \|\left(\mathbf{U}^{\perp}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\|^2.$$

Пусть $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \ldots : \mathbf{X}_m]$, где $\mathbf{X}_k = \mathcal{T}(\mathsf{X}_k)$. Введем упорядоченность:

$$\left\|U_i^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right\|^2 \geq \left\|U_j^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right\|^2 \iff i \leq j.$$

В MSSA $\lambda_i = \left\|U_i^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right\|^2$, т.е. $\lambda_i \geq \lambda_j \iff i \leq j$.

Модель: $\mathbf{\Sigma}_k = \mathbf{U}\mathbf{T}_k\mathbf{U}^\mathrm{T},\ k = 1, \ldots, m$:

$$\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{S}_k - \mathbf{U}\mathbf{T}_k\mathbf{U}^\mathrm{T}\|^2 \to \min_{\mathbf{U}},\ \mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}, \qquad (3)$$

$\mathbf{T}_k$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица.

Совпадает с задачей Common Components Analysis (CCA) [Wang, 2011].

Свойства:

- Минимум функционала равен нулю тогда и только тогда, когда восстановление точное.
- Минимум функционала для рядов конечного ранга при $r \geq \mathrm{rk}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$ равен нулю.
- При $m = 1$ совпадает с методом SSA.
- Если $\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}$ — решение задачи, то для любого $\mathbf{\Pi} \in \mathcal{O}_{r,r}$ матрица $\mathbf{U}\mathbf{\Pi}$ — решение.
- Отсутствие преемственности.

Модель: $\mathbf{\Sigma}_k = \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{U}^\mathrm{T},\ k = 1, \ldots, m$:

$$\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{S}_k - \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{U}^\mathrm{T}\|^2 \to \min_{\mathbf{U},\mathbf{D}_k}, \mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r}, \mathbf{D}_k \in \mathcal{D}_r. \tag{4}$$

Совпадает с задачей O-INDSCAL [Trendafilov, 2004].

Свойства:

- Если минимум функционала равен нулю, то восстановление точное. Обратное, вообще говоря, неверно.
- При выполнении некоторых условий минимум функционала для рядов конечного ранга при $r \geq \mathrm{rk}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$ равен нулю.
- При $m = 1$ решение совпадает с решением SSA.
- Преемственность?

Модель: $\mathbf{Z}_k = \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^{\mathrm{T}},\ k = 1, \ldots, m.$

$$\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^{\mathrm{T}}\|^2 \to \min_{\mathbf{U},\mathbf{D}_k,\mathbf{V}_k},\ \mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r},\ \mathbf{D}_k \in \mathcal{D}_r,\ \mathbf{V}_k \in \mathcal{O}_{K,r} \qquad (5)$$

Утверждение

Фиксируем длину окна L. Рассмотрим систему рядов длины N:

$$\mathsf{X}_k : \mathsf{x}_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{d_k} A_i^{(k)} \cos(2\pi n \omega_i^{(k)}),\ k = 1, \ldots, m,$$

где $\omega_i^{(k)} \in (0; 1/2]$, $i = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, m$. Если $L\omega_i^{(k)}$, $K\omega_i^{(k)}$ целые, $i = 1, \ldots, d_k$, $k = 1, \ldots, m$, $K = N - L + 1$, то минимум функционала равен 0 при $r \geq \mathrm{rk}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m]$. При этом столбцы решения $\mathbf{U}^{(r)}$ являются первыми r левыми сингулярными векторами матрицы $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \ldots : \mathbf{X}_m]$.

Модель: $\mathbf{Z}_k = \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^{\mathrm{T}},\ k = 1,\ldots,m.$

$$\sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{X}_k - \mathbf{U}\mathbf{D}_k\mathbf{V}_k^{\mathrm{T}}\|^2 \to \min_{\mathbf{U},\mathbf{D}_k,\mathbf{V}_k},$$
$$\mathbf{U} \in \mathcal{O}_{L,r},\ \mathbf{D}_k \in \mathcal{D}_r,\ \mathbf{V}_k \in \mathcal{O}_{K,r},\ k = 1,\ldots,m.$$

Свойства:

- Если минимум функционала равен нулю, то восстановление точное. Обратное, вообще говоря, неверно.
- При выполнении некоторых условий минимум функционала для рядов конечного ранга при $r \geq \mathrm{rk}[\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_m]$ равен нулю.
- При $m = 1$ решение совпадает с решением SSA.
- Отсутствие преемственности.

Метод ALS: найти решение задачи

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\|^2 \to \min_{\mathbf{A}\in\mathcal{A},\mathbf{B}\in\mathcal{B}}. \tag{6}$$

Вход: $\mathbf{A}_0$ — начальная матрица.

Алгоритм:

$$\mathbf{B}_i = \operatorname*{argmin}_{B\in\mathcal{B}} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}_i\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\|^2,$$

$$\mathbf{A}_{i+1} = \operatorname*{argmin}_{A\in\mathcal{A}} \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\|^2$$

Используемые пакеты и функции:

- SSA, MSSA: пакет Rssa

```
ssa(f, kind = ''mssa'', L)
ssa(f, L)
```

- CODR: реализация Iterative EVD Algorithm for CCA [Wang, 2011]

```
cca(S, r = r, eps, maxiter)
```

  Особенность реализации: решает проблему упорядоченности.

- DODR: пакет PTAk

```
CANDPARA(S, dim = r, test = eps, Maxiter = maxiter)
```

  Особенность реализации: преемственность решения алгоритма.

- O-SCA: собственная реализация алгоритма с помощью ALS

```
sca(X, r = r, eps, maxiter)
```

$\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_m$ — система временных рядов, $\mathsf{X}_k = \mathsf{F}_k + \mathsf{R}_k$, F_k — сигнал, R_k – шум.
Напоминание: MSSA при $m = 1$ называется SSA.

- Ряды разной структуры: $\mathrm{rk}[\mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_m] = \mathrm{rk}\,\mathsf{F}_1 + \mathrm{rk}\,\mathsf{F}_2 + \ldots + \mathrm{rk}\,\mathsf{F}_m$.
- Ряды одинаковой структуры: $\mathrm{rk}[\mathsf{F}_1, \ldots, \mathsf{F}_m] = \max\limits_k \mathrm{rk}\,\mathsf{F}_k$.

Для рядов разной структуры лучше применять SSA к каждому ряду по отдельности, для рядов одинаковой структуры — MSSA к системе рядов.

Задача сравнения: найти модификацию MSSA, которая будет не хуже в общем случае, а для рядов с разной структуры будет лучше.

- Ряды одинаковой структуры:

$$\mathsf{X}^{(1)} : \mathsf{x}_n^{(1)} = 1.8\cos(2\pi n/8) + \cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n^{(1)},$$
$$\mathsf{X}^{(2)} : \mathsf{x}_n^{(2)} = 2\cos(2\pi n/8) + 1.5\cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n^{(2)},$$
$$N = 71,\ \varepsilon_n^{(k)} \sim N(0, 0.25),\ \mathrm{rk}[\mathsf{F}^{(1)}, \mathsf{F}^{(2)}] = 4,\ \text{число итераций} = 30.$$

  Возрастание ошибок:
  - MSSA $\approx$ CODR $\approx$ DODR $\approx$ O-SCA $<$ SSA.

- Ряды различной структуры:

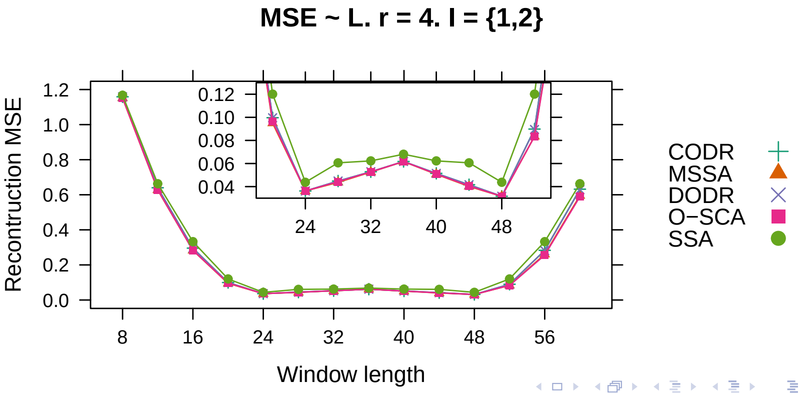
$$\mathsf{X}^{(1)} : \mathsf{x}_n^{(1)} = 2.5\cos(2\pi n/8) \quad +0 \qquad\qquad +\varepsilon_n^{(1)},$$
$$\mathsf{X}^{(2)} : \mathsf{x}_n^{(2)} = 0 \qquad\qquad +2\cos(2\pi n/6) \quad +\varepsilon_n^{(2)},$$
$$N = 71,\ \varepsilon_n^{(k)} \sim N(0, 0.25),\ \mathrm{rk}[\mathsf{F}^{(1)}, \mathsf{F}^{(2)}] = 4,\ \text{число итераций} = 30.$$

  Возрастание ошибок:
  - SSA $<$ MSSA $\approx$ CODR $\approx$ DODR $\approx$ O-SCA.

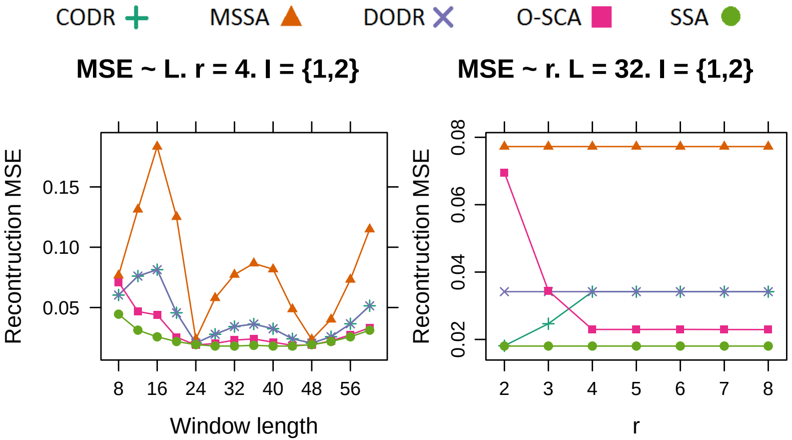
$$\mathsf{X}^{(1)}: \mathsf{x}_n^{(1)} = 1.8\cos(2\pi n/8) + \cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n^{(1)},$$
$$\mathsf{X}^{(2)}: \mathsf{x}_n^{(2)} = 2\cos(2\pi n/8) + 1.5\cos(2\pi n/12) + \varepsilon_n^{(2)},$$
$$N = 71,\ \varepsilon_n^{(k)} \sim N(0, 0.25),\ \mathrm{rk}[\mathsf{F}^{(1)}, \mathsf{F}^{(2)}] = 2,\ \text{число итераций} = 30.$$

Результаты по возрастанию ошибок:

MSSA $\approx$ CODR $\approx$ DODR $\approx$ O-SCA $<$ SSA.



$$\mathsf{X}^{(1)} : \mathsf{x}_n^{(1)} = {\color{blue}2.5\cos(2\pi n/8)} \quad +0 \qquad\qquad +\varepsilon_n^{(1)},$$
$$\mathsf{X}^{(2)} : \mathsf{x}_n^{(2)} = {\color{blue}0} \qquad\qquad\quad +2\cos(2\pi n/6) \quad +\varepsilon_n^{(2)},$$
$$N = 71,\ \varepsilon_n^{(k)} \sim N(0, 0.25),\ \mathrm{rk}[\mathsf{F}^{(1)}, \mathsf{F}^{(2)}] = 2,\ \text{число итераций} = 30.$$



Результаты:

- Изучены методы SSA, MSSA, их основные свойства;
- Предложены модификации метода MSSA;
- Проведено сравнение различных свойств этих модификаций;
- Исследованы свойства модификаций методы MSSA, связанные с рядами конечного ранга;
- Построен метод SCA-SSA, отделяющий комоненты сигнала в общем случае не хуже, чем MSSA, а в случае рядов различной структуры лучше метода MSSA;
- Реализованы и разработаны различные алгоритмы на языке R для решения поставленных задач.