Выделение сигнала в случае неравноотстоящих наблюдений

Иванова Полина Максимовна, 422-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доц. **Н.Э. Голяндина**
Рецензент: ассистент **А.Ю. Шлемов**

Санкт-Петербург
2015 г.

Наблюдается временной ряд $F_N = (f_1, \ldots, f_N)$.
Пусть функция u достаточно гладкая на $\mathbb{R}$.
Рассмотрим модели временного ряда:

(X_A): $\quad f_i = u(i\Delta + \varepsilon_i)$,
$(X_A Y_A)$: $\quad f_i = u(i\Delta + \varepsilon_i) + \delta_i$,

где $i = \overline{1, N}$, $\Delta_{(N)} = \Delta$ — некоторый шаг,
$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\delta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$, ε_i и δ_i независимые в совокупности.

Значения $u(i\Delta)$ неизвестны.

Предположение: Есть метод, умеющий оценивать математическое ожидание наблюдаемого временного ряда.

Это означает, что есть метод, умеющий оценивать $s_i = \mathbb{E}x_i$, если наблюдаются

$$x_i = s_i + \zeta_i, \text{ где } \mathbb{E}\zeta_i = 0, \; s_i = s(i\Delta),$$

s — гладкая функция на $\mathbb{R}$.

Задача: Построить алгоритм, оценивающий значения $u(i\Delta)$ и зависящий только от наблюдаемых значений элементов ряда F_N в предположении, что есть метод, умеющий оценивать м.о. наблюдаемого ряда.

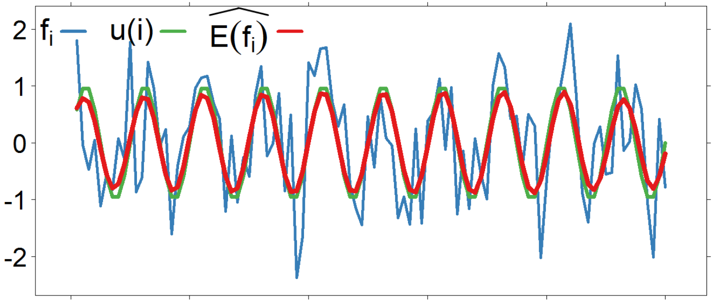
Что означает предположение о существовании метода, умеющего оценивать математическое ожидание ряда?

Рассмотрим функцию $u(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right)$ в точках $i\Delta$, где $i = \overline{1, 100}$, $\Delta = 1$.

Ряд $F_N = (f_1, \ldots, f_N)$: $f_i = u(i\Delta) + \delta_i$, где $\delta_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и независимы.

Выделим математическое ожидание ряда с помощью метода «Гусеница»-SSA.

$\widehat{E(f_i)}$, где $f_i = u(i) + \delta_i$. $i = \overline{1:100}$. Метод Гусеница-SSA. Длина окна L = 50.



Рассмотрим следующие модели ряда:

Модели I порядка:

$(X_A)_1$: $\quad h_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i,$

$(X_A Y_A)_1$: $\quad h_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + \delta_i,$

Модели II порядка:

$(X_A)_2$: $\quad g_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + \frac{1}{2}u''(i\Delta)\ \varepsilon_i^2,$

$(X_A Y_A)_2$: $\quad g_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + \frac{1}{2}u''(i\Delta)\ \varepsilon_i^2 + \delta_i.$

где $i = \overline{1, N}$, $\Delta_{(N)} = \Delta$ — некоторый шаг,
$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $\delta_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$, ε_i и δ_i независимые в совокупности.

Наблюдения, зависящие от функции u и значений $i\Delta$ и ε_i могут быть упорядочены разными способами:

1. по индексу i;
2. по значениям $i\Delta + \varepsilon_i$.

Стандартным считаем упорядочивание по индексу.
Например, такими наблюдениями являются значения ряда $F_N = (f_1, \ldots, f_N)$, где $f_i = u(i\Delta + \varepsilon_i) + \delta_i$.

План доклада:

1. Построим алгоритмы оценивания $u(i\Delta)$ для моделей I и II порядка со стандартным упорядочиванием элементов ряда.
2. Исследуем работу уже построенных алгоритмов при другом виде упорядочивания элементов ряда.

$$(X_A)_1: \; h_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i$$
$$(X_A Y_A)_1: \; h_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + \delta_i$$

Алгоритм 1

Входные данные: ряд $H_N = (h_1, \ldots, h_N)$, метод оценивания математического ожидания ряда.
Выход: $\widehat{u}$.

1. Оцениваем математическое ожидание ряда: $\widehat{\mathbb{E}h_i}$.
2. Оценка функции $\widehat{u}$ по формуле $\widehat{u}(i\Delta) = \widehat{\mathbb{E}h_i}$.

$(X_A)_2$: $\quad g_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + u''(i\Delta)\varepsilon_i^2$

Алгоритм 2

Входные данные: ряд $G_N = (g_1, \dots, g_N)$, шаг Δ, метод оценивания математического ожидания.

Выход: $\widehat{u}$.

1. Оцениваем $\widehat{\mathbb{E}g_i}$.
2. Оцениваем производные $\widehat{u'}$ и $\widehat{u''}$:

$$\widehat{u'}(i\Delta) = \frac{\widehat{\mathbb{E}g_{i+1}} - \widehat{\mathbb{E}g_{i-1}}}{2\Delta}, \qquad \widehat{u''}(i\Delta) = \frac{\widehat{\mathbb{E}g_{i-1}} - 2\widehat{\mathbb{E}g_i} + \widehat{\mathbb{E}g_{i+1}}}{\Delta^2}.$$

3. Оцениваем дисперсию σ_ε^2 случайной величины ε_i как:

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \left(-\widehat{S}_{u'} + \sqrt{\left(\left(\widehat{S}_{u'}\right)^2 + 2 \cdot \widehat{S}_{u''} \cdot \widehat{S}_{\widehat{\mathbb{E}}}\right)}\right) \Big/ \widehat{S}_{u''},$$

где $\widehat{S}_{u'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\widehat{u'}(i\Delta))^2$, $\widehat{S}_{u''} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\widehat{u''}(i\Delta))^2$, $\widehat{S}_{\widehat{\mathbb{E}}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(g_i - \widehat{\mathbb{E}g_i}\right)^2$.

4. Оценка функции $\widehat{u}$ по формуле $\widehat{u}(i\Delta) = \widehat{\mathbb{E}g_i} - \frac{1}{2}\widehat{u''}(i\Delta)\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$.

Математическое ожидание элементов ряда

$$(X_A)_1, (X_AY_A)_1 \qquad \mathbb{E}h_i = u(i\Delta),$$
$$(X_A)_2, (X_AY_A)_2 \qquad \mathbb{E}g_i = u(i\Delta) + \frac{1}{2}u''(i\Delta)\ \sigma_\varepsilon^2.$$

Для моделей $(X_A)_2, (X_AY_A)_2$ производные функции u равны

$$u'(i\Delta) = \frac{\mathbb{E}g_{i+1} - \mathbb{E}g_{i-1}}{2\Delta} - R_1,$$
$$u''(i\Delta) = \frac{\mathbb{E}g_{i-1} - 2\mathbb{E}g_i + \mathbb{E}g_{i+1}}{\Delta^2} - R_2,$$

где $R_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}u^{(3)}(i\Delta) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{u^{(5)}(\eta_i^{(1)}\Delta)\Delta^2}{6} + \frac{u^{(3)}(\theta_i^{(1)}\Delta)\Delta^2}{6},$

$$R_2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}u^{(3)}(i\Delta) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{u^{(6)}(\eta_i^{(2)}\Delta)\Delta^2}{12} + \frac{u^{(4)}(\theta_i^{(2)}\Delta)\Delta^2}{12},$$

$\theta_i^{(1)}, \eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)} \in (i-1, i+1).$

I. Обоснование алгоритма. Оценки производных в моделях $(X_A)_2$, $(X_A Y_A)_2$

Оценки для u' и u'':

$$\widehat{u'}(i\Delta) = \frac{\widehat{\mathbb{E}g_{i+1}} - \widehat{\mathbb{E}g_{i-1}}}{2\Delta}, \qquad \widehat{u''}(i\Delta) = \frac{\widehat{\mathbb{E}g_{i-1}} - 2\widehat{\mathbb{E}g_i} + \widehat{\mathbb{E}g_{i+1}}}{\Delta^2}.$$

1. Если $\widehat{\mathbb{E}g_i} = \mathbb{E}g_i$ и $u^{(3)} \equiv 0$, то $\widehat{u'}(i\Delta) \equiv u'(i\Delta)$, $\widehat{u''}(i\Delta) \equiv u''(i\Delta)$.
2. Если $\widehat{\mathbb{E}g_i} \approx \mathbb{E}g_i$ и остаточные члены в разложениях u' и u'' малы, то есть

$$R_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} u^{(3)}(i\Delta) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{u^{(5)}(\eta_i^{(1)}\Delta)\Delta^2}{6} + \frac{u^{(3)}(\theta_i^{(1)}\Delta)\Delta^2}{6} \approx 0,$$

$$R_2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} u^{(3)}(i\Delta) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{u^{(6)}(\eta_i^{(2)}\Delta)\Delta^2}{12} + \frac{u^{(4)}(\theta_i^{(2)}\Delta)\Delta^2}{12} \approx 0,$$

где $\theta_i^{(1)}, \eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)} \in (i-1, i+1)$,

то $\widehat{u'}(i\Delta) \approx u'(i\Delta)$, $\widehat{u''}(i\Delta) \approx u''(i\Delta)$.

$(X_A)_2$: $\quad g_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + u''(i\Delta)\varepsilon_i^2$

Тождество для дисперсии:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \left(-S_{u'} + \sqrt{\left(\left(S_{u'}\right)^2 + 2\cdot S_{u''}\cdot S_{\mathbb{E}}\right)}\right) \Big/ \left(S_{u''}\right),$$

где $S_{u'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u'(i\Delta))^2$, $S_{u''} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u''(i\Delta))^2$, $S_{\mathbb{E}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(g_i - \mathbb{E}g_i)^2$.

Оценка для дисперсии:

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \left(-\widehat{S}_{u'} + \sqrt{\left(\left(\widehat{S}_{u'}\right)^2 + 2\cdot \widehat{S}_{u''}\cdot \widehat{S}_{\widehat{\mathbb{E}}}\right)}\right) \Big/ \widehat{S}_{u''},$$

где $\widehat{S}_{u'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widehat{u'}(i\Delta))^2$, $\widehat{S}_{u''} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widehat{u''}(i\Delta))^2$, $\widehat{S}_{\widehat{\mathbb{E}}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(g_i - \widehat{\mathbb{E}g_i}\right)^2$.

Утверждение

Оценка $\widehat{S}^{(0)}_{\widehat{\mathbb{E}}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(g_i - \mathbb{E}g_i)^2$ *является несмещенной оценкой для* $S_{\mathbb{E}}$.

При этом, если $u^{(3)} \equiv 0$ *и* $\Delta = 1/N$, *то* $\mathbb{D}\widehat{S}^{(0)}_{\widehat{\mathbb{E}}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Тогда, при $\widehat{\mathbb{E}g_i} = \mathbb{E}g_i$, $u^{(3)} \equiv 0$ и $\Delta = 1/N$, оценка дисперсии $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$ — состоятельная оценка для σ_ε^2.

Модель $(X_A)_2$: $\quad g_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + \frac{1}{2}u''(i\Delta)\ \varepsilon_i^2.$

Оценка функции: $\quad \widehat{u}(i\Delta) = \widehat{\mathbb{E}g_i} - \frac{1}{2}\widehat{u''}(i\Delta)\widehat{\sigma}_\varepsilon^2.$

Применимость алгоритма:

1. Есть метод, достаточно точно оценивающий математическое ожидание ряда.
2. Остаточные члены в разложении u' и u'' пренебрежимо малы:

$$R_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}u^{(3)}(i\Delta) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{u^{(5)}(\eta_i^{(1)}\Delta)\Delta^2}{6} + \frac{u^{(3)}(\theta_i^{(1)}\Delta)\Delta^2}{6} \approx 0,$$

$$R_2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}u^{(3)}(i\Delta) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{u^{(6)}(\eta_i^{(2)}\Delta)\Delta^2}{12} + \frac{u^{(4)}(\theta_i^{(2)}\Delta)\Delta^2}{12} \approx 0,$$

где $\theta_i^{(1)}, \eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)} \in (i-1, i+1)$.

Функция $u(x) = \sin\left(200 \cdot \frac{2\pi x}{T}\right)$.

Данные: $F_N = (f_1, \ldots, f_N)$, где $f_i = u(i\Delta + \varepsilon_i)$, $i = \overline{1, N}$, $N = 200$, $\Delta = 1/N$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ и независимые.

Метод оценивания математического ожидания ряда — «Гусеница»-SSA.

Длина окна $L = 100$. Восстановление ряда по двум компонентам.

Таблица 1 : Сравнение оценок значений $u(i\Delta)$ по алгоритму 1 (модель $(X_A)_1$) и по алгоритму 2 (модель $(X_A)_2$). Число повторов равно 1000.

σ_ε	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
T	7	8	9	11	13	14
MSE$_{(X_A)_1}$	7.3e-03	8.2e-03	9.4e-03	7.6e-03	6.4e-03	7.2e-03
MSE$_{(X_A)_2}$	**3.1e-03**	**3.4e-03**	**3.7e-03**	**3e-03**	**2.7e-03**	**2.8e-03**
bias$^2_{(X_A)_1}$	4.7e-03	5.4e-03	6.4e-03	4.9e-03	4e-03	4.8e-03
bias$^2_{(X_A)_2}$	**4.8e-05**	**2.3e-05**	**4.2e-06**	**3e-06**	**1.3e-06**	**1e-05**
$\mathbb{D}\widehat{u}_{(X_A)_1}$	2.6e-03	2.8e-03	3.1e-03	2.6e-03	2.4e-03	2.5e-03
$\mathbb{D}\widehat{u}_{(X_A)_2}$	3.1e-03	3.4e-03	3.7e-03	3.1e-03	2.7e-03	2.8e-03
$\widehat{\sigma}_\varepsilon$	0.5596	0.6509	0.7435	0.8317	0.92	1.023

$(X_A Y_A)_2$: $$g_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i + u''(i\Delta)\varepsilon_i^2 + \delta_i$$

Тождество для дисперсии σ_ε^2:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \frac{-S_{u'} + \sqrt{\left(\left(S_{u'}\right)^2 + 2 \cdot S_{u''} \cdot (S_{\mathbb{E}} - \sigma_\delta^2)\right)}}{S_{u''}},$$

где $S_{u'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u'(i))^2$, $S_{u''} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u''(i))^2$, $S_{\mathbb{E}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{E}(h_i - \mathbb{E}h_i)^2$.

Для оценки дисперсии σ_ε^2 необходимо оценить дисперсию σ_δ^2. Можно рассмотреть ОМП для σ_ε^2 и σ_δ^2, полученные для модели II порядка $(X_A Y_A)_2$ в работе Абрамовой (2015).

Работающий алгоритм оценивания $u(i\Delta)$ построить не удалось.

Наблюдения, зависящие от функции u и значений $i\Delta$ и ε_i могут быть упорядочены разными способами:

1. по индексу i;
2. по значениям $i\Delta + \varepsilon_i$.

Стандартным считаем упорядочивание по индексу.
Например, такими наблюдениями являются значения ряда $F_N = (f_1, \ldots, f_N)$, где $f_i = u(i\Delta + \varepsilon_i) + \delta_i$.

Упорядочивание вторым способом:

- $(t_1, \ldots, t_N) \longmapsto (t_{(1)}, \ldots, t_{(N)})$
- Обозначая k_i — ранг точки t_i:

$$(f_1, \ldots, f_N) \longmapsto (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_N),$$

где $\tilde{f}_i = f_{k_i}$.

Вопрос: как изменится модель ряда?

Рассмотрим модель I порядка $(X_A)_1$: $H = (h_1, h_2)$, где $h_i = u(i\Delta) + u'(i\Delta)\varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Определим ряд $\tilde{H} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$, где

$$\tilde{h}_1 = u(\Delta) + u'(\Delta) \cdot \min\{\varepsilon_1, \Delta + \varepsilon_2\},$$
$$\tilde{h}_2 = u(2\Delta) + u'(2\Delta) \cdot \max\{\varepsilon_1 - \Delta, \varepsilon_2\}.$$

Сравним MSE, смещения (bias) и дисперсии величин h_1 и $\tilde{h}_1$.

Для h_1:

$$\text{bias}\,(h_1) = 0,$$
$$\mathbb{D}\,(h_1) = \text{MSE}\,(h_1) = \left(u'(\Delta)\right)^2 \cdot \sigma^2.$$

Чему равны эти величины для $\tilde{h}_1$?

В статье S. Nadarajah, S. Kotz (2008) приведены формулы первых двух моментов для $\min$ и $\max$ двух нормальных величин.

$$\mathbb{E}\min\{\varepsilon_1, 1 + \varepsilon_2\} = \Phi\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \sigma\sqrt{2} \cdot \phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$
$$\mathbb{E}\left(\min\{\varepsilon_1, 1 + \varepsilon_2\}\right)^2 = \sigma^2 + \Phi\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \sigma\sqrt{2} \cdot \phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$

где Φ и ϕ — функцию распределения и плотность $\mathcal{N}(0, 1)$.

Для h_1:

$$\mathsf{bias}\,(h_1) = 0,$$
$$\mathbb{D}\,(h_1) = \mathsf{MSE}\,(h_1) = \left(u'(\Delta)\right)^2 \cdot \sigma^2.$$

Для $\tilde{h}_1$:

$$\mathsf{bias}\left(\tilde{h}_1\right) = u'(\Delta)\left(\Phi\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \sigma\sqrt{2}\cdot\phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right),$$
$$\mathbb{D}\left(\tilde{h}_1\right) = (u'(\Delta))^2\cdot\left(\sigma^2 + \Delta^2\,\Phi\left(-\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{\Delta\sigma}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\Delta}{4\sigma^2}}\right) -$$
$$-(u'(\Delta))^2\cdot\left(\Delta\Phi\left(-\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\Delta}{4\sigma^2}}\right)^2,$$
$$\mathsf{MSE}\left(\tilde{h}_1\right) = (u'(i\Delta))^2\left(\sigma^2 + \Delta^2\cdot\Phi\left(-\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{\Delta\sigma}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\frac{\Delta}{4\sigma^2}}\right).$$

Утверждение

$$\left|\mathit{bias}\left(\tilde{h}_i\right)\right| \geq \left|\mathit{bias}\,(h_i)\right| = 0,\ \mathbb{D}\left(\tilde{h}_i\right) \leq (u'(i\Delta))^2\cdot\sigma^2 = \mathbb{D}\,(h_i),$$
$$\mathit{MSE}\left(\tilde{h}_i\right) \leq (u'(i\Delta))^2\cdot\sigma^2 = \mathit{MSE}\,(h_i),\ i = \overline{1,2}.$$

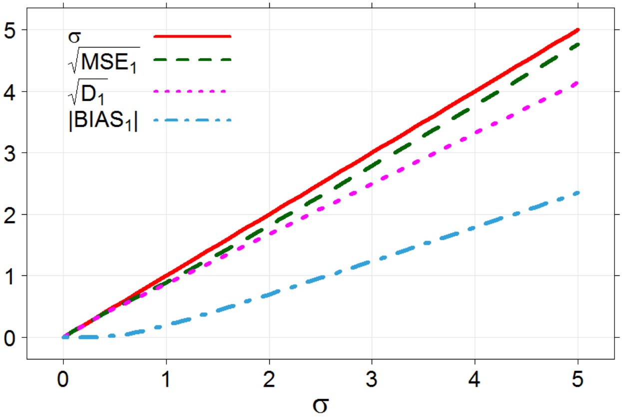


Рис. 1 : Зависимость $|\text{bias}\left(\tilde{h}_1\right)|$, $\sqrt{\mathbb{D}\left(\tilde{h}_1\right)}$ и $\sqrt{\text{MSE}\left(\tilde{h}_1\right)}$, $i = 1, 2$, от σ — корня из дисперсии случайной величины ε_1, на примере функции u такой, что $u'(\Delta) = 1$.

Функция $u(x) = \sin\left(200 \cdot \frac{2\pi x}{T}\right)$.

Данные: $F = (f_1, \ldots, f_N)$, где $f_i = u(i\Delta + \varepsilon_i)$, $i = \overline{1, N}$, $N = 200$, $\Delta = 1/N$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и независимые.

Метод оценивания математического ожидания ряда — «Гусеница»-SSA.

Восстановление ряда по двум компонентам.

Таблица 2 : Сравнение оценок значений $u(i\Delta)$ по алгоритму 2 (модель $(X_A)_2$) в случае данных, упорядоченных по i, и данных, упорядоченных по $i/N + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, N}$, $N = 200$. Число повторов 1000.

σ_ε	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
T	7	8	9	11	13	14
MSE	3.2e-03	3.2e-03	3.8e-03	3e-03	2.8e-03	3e-03
MSE$_{\text{sort}}$	**2.8e-03**	**3e-03**	**3.3e-03**	**2.6e-03**	**2.4e-03**	**2.5e-03**
bias^2	5e-05	2.5e-05	1.1e-05	3.3e-06	1.7e-06	5.4e-06
bias$^2_{\text{sort}}$	**4.1e-05**	**2.3e-05**	**1.3e-05**	**3.1e-06**	**0.6e-06**	**2.7e-06**
$\mathbb{D}\widehat{u}$	3e-03	3.2e-03	3.6e-03	3e-03	2.7e-03	3e-03
$\mathbb{D}\widehat{u}_{\text{sort}}$	2.8e-03	2.8e-03	3.1e-03	2.6e-03	2.4e-03	2.5e-03
$\widehat{\sigma}$	0.558	0.652	0.742	0.832	0.925	1.02
$\widehat{\sigma}_{\text{sort}}$	0.498	0.55	0.591	0.626	0.667	0.7

Результаты

- Были рассмотрены четыре модели и для трех из них построены алгоритмы оценивания функции u в регулярной решетке.
- Для модели I порядка были получены теоретические заключения об уменьшении среднеквадратического отклонения от истинных значений при упорядочивании по возрастанию точек, в которых измерялась функция u.
- На ряде примеров было проведено сравнение работы построенных алгоритмов в различных моделях и при различном упорядочивании.
- Дополнительно были рассмотрены статистические критерии и была численно показана их применимость и мощность против альтернатив о несоответствии типа неравномерности точек, в которых измеряются данные.