Исследование аналога метода отжига в многоэкстремальных задачах

Куликов Денис, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Некруткин В.В.

Санкт-Петербург
2015г.

Проблема

- Хорошо изучены методы поиска единственного глобального экстремума и многоэкстремальный случай в дискретных задачах (метод отжига).
- Случай многих глобальных экстремумов в общем случае практически не изучен.

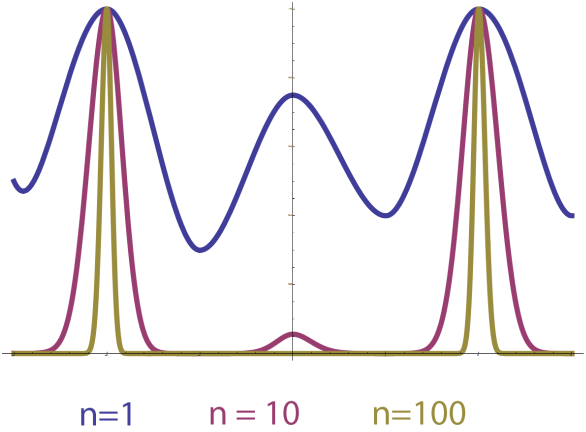
Задача: адаптировать идею метода отжига для многоэкстремальных задач и теоретически исследовать полученный метод.

Проблема

- Хорошо изучены методы поиска единственного глобального экстремума и многоэкстремальный случай в дискретных задачах (метод отжига).
- Случай многих глобальных экстремумов в общем случае практически не изучен.

Задача: адаптировать идею метода отжига для многоэкстремальных задач и теоретически исследовать полученный метод.

Идея метода



Многоэкстремальная, ограниченная единицей, неотрицательная функция возводится в степень n.

Общая постановка задачи

- Пусть $(D, \mathfrak{A}, \mu)$ пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, порожденной метрикой ρ, и конечной мерой μ.
- Пусть $f(x) \in \mathbb{L}(D, \mu)$ и $0 \le f(x) \le G$ (НУО $G = 1$).
- Рассмотрим последовательность распределений $\mathcal{P}_n$ таких, что:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mathcal{P}_n(A) = \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)}.$$

- Вопрос: $\mathcal{P}_n \Longrightarrow ?$

Общая постановка задачи

- Пусть $(D, \mathfrak{A}, \mu)$ пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, порожденной метрикой ρ, и конечной мерой μ.
- Пусть $f(x) \in \mathbb{L}(D, \mu)$ и $0 \leq f(x) \leq G$ (НУО $G = 1$).
- Рассмотрим последовательность распределений $\mathcal{P}_n$ таких, что:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mathcal{P}_n(A) = \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)}.$$

- Вопрос: $\mathcal{P}_n \Longrightarrow ?$

Общая постановка задачи

- Пусть $(D, \mathfrak{A}, \mu)$ пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, порожденной метрикой ρ, и конечной мерой μ.
- Пусть $f(x) \in \mathbb{L}(D, \mu)$ и $0 \leq f(x) \leq G$ (НУО $G = 1$).
- Рассмотрим последовательность распределений $\mathcal{P}_n$ таких, что:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mathcal{P}_n(A) = \frac{\int\limits_A f^n(x)\, \mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\, \mu(dx)}.$$

- Вопрос: $\mathcal{P}_n \Longrightarrow ?$

Общая постановка задачи

- Пусть $(D, \mathfrak{A}, \mu)$ пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$, порожденной метрикой ρ, и конечной мерой μ.
- Пусть $f(x) \in \mathbb{L}(D, \mu)$ и $0 \le f(x) \le G$ (НУО $G = 1$).
- Рассмотрим последовательность распределений $\mathcal{P}_n$ таких, что:

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mathcal{P}_n(A) = \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)}.$$

- Вопрос: $\mathcal{P}_n \Longrightarrow ?$

Цель работы

Изучить свойства последовательности распределений $\mathcal{P}_n$.

- Есть ли предельное распределение?
- Если есть, то какое?

Цель работы

Изучить свойства последовательности распределений $\mathcal{P}_n$.

- Есть ли предельное распределение?
- Если есть, то какое?

Цель работы

Изучить свойства последовательности распределений $\mathcal{P}_n$.

- Есть ли предельное распределение?
- Если есть, то какое?

Дискретный случай

$$\mathcal{P} : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix},$$

причём $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ — равные моды и $q_{i_1} = \dots = q_{i_m} = q^*$. Рассмотрим

$$\mathcal{P}_n : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ c_n q_1^n & c_n q_2^n & \dots \end{pmatrix},$$

где c_n — нормировочный коэффициент, такой что $\sum_{i=1}^{\infty} c_n q_i^n = 1$, и пусть

$$\mathcal{P}_0 : \begin{pmatrix} x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_m} \\ 1/m & 1/m & \dots & 1/m \end{pmatrix}.$$

Получен результат:

Теорема

$\mathcal{P}_n \xrightarrow{var} \mathcal{P}_0$

Варианты множества глобальных максимумов

$(D, \mathfrak{A}, \mu)$, ρ, $f(x) \in \mathbb{L}(D, \mu)$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Рассмотрим множество

$$M = \{x \in D \mid f(x) = 1\}.$$

1. $\mu(M) > 0$.
2. $\mu(M) = 0$

Варианты множества глобальных максимумов

$(D, \mathfrak{A}, \mu)$, ρ, $f(x) \in \mathbb{L}(D, \mu)$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Рассмотрим множество

$$M = \{x \in D \mid f(x) = 1\}.$$

1. $\mu(M) > 0$.
2. $\mu(M) = 0$

Варианты множества глобальных максимумов

$(D, \mathfrak{A}, \mu)$, ρ, $f(x) \in \mathbb{L}(D, \mu)$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Рассмотрим множество

$$M = \{x \in D \mid f(x) = 1\}.$$

1. $\mu(M) > 0.$
2. $\mu(M) = 0$

Случай множества ненулевой меры

Результат:

Предложение

Если $\mu(M) > 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)} = \frac{\mu(A \cap M)}{\mu(M)}.$$

Следствие

μ — *мера Лебега,* $D \subset \mathbb{R}$ — *некоторый отрезок,* $\mathfrak{A}$ — *борелевская* σ*-алгебра,* $[a;b] \subset D$. *Пусть* $M = [a;b]$, *тогда:*

$$\mathcal{P}_n \Longrightarrow U([a,b]).$$

Случай множества нулевой меры

Введем функцию

$$F_f(t) = \mu(\{x \in D \mid f(x) < t\}), \quad t \in [0;1].$$

Правдоподобное предположение:

Теорема

Если $\mu(M) = 0$, $f(x)$ непрерывна в окрестности M и $F_f(t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности единицы, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(\{x \in A \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}{\mu(\{x \in D \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}.$$

Одномерный случай

μ — мера Лебега, $D \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок, $\mathfrak{A}$ — борелевская σ-алгебра, $[a;b] \subset D$.

1. $\mu(M) > 0$.
2. $\mu(M) = 0 : M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset (a;b)$.

Случай нулевой меры M

Теорема

Пусть $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *и* f *в окрестности глобальных максимумов ведет себя как*

$$f(x) = 1 - \alpha_k |x - x_k|^\sigma + \underset{x \to x_k}{o}(|x - x_k|^\sigma), \quad x \in U(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

где $\alpha_k, \sigma > 0$, $U(x_k)$ *— некоторая окрестность точки* x_k.
Тогда

$$\mathcal{P}_n \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix}, \quad p_k = \frac{\alpha_k^{-1/\sigma}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^{-1/\sigma}}.$$

Случай ненулевых первых производных

Теорема

Пусть $M = \{x_1, x_2\}$ *и существуют* $f'_-(x_1), f'_+(x_1), f'_-(x_2), f'_+(x_2)$ *отличные от* 0. *Тогда если обозначить*

$$|f'_-(x_1)| = \alpha,\ |f'_+(x_1)| = \beta,\ |f'_-(x_2)| = \gamma,\ |f'_+(x_2)| = \delta,$$

то

$$\mathcal{P}_n \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \dfrac{q_1}{q_1+q_2} & \dfrac{q_2}{q_1+q_2} \end{pmatrix},$$

где $q_1 = 1/\alpha + 1/\beta$ *и* $q_2 = 1/\gamma + 1/\delta$.

Эквивалентная задача

Как находить минимумы?

Теорема

Напомним, что

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mathcal{P}_n(A) = \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)}.$$

Пусть $g(x) = 1 - f(x)$. Рассмотрим ещё одну последовательность распределений:

$$\mathcal{Q}_n(A) = \frac{\int\limits_A e^{-ng(x)}\,\mu(dx)}{\int\limits_D e^{-ng(x)}\,\mu(dx)}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда обе последовательности распределений $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{Q}_n$ слабо сходятся или не сходятся одновременно, и, если сходятся, то предельные распределения совпадают.

Эквивалентная задача

Как находить минимумы?

Теорема

Напомним, что

$$\forall A \in \mathfrak{A} \quad \mathcal{P}_n(A) = \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)}.$$

Пусть $g(x) = 1 - f(x)$. *Рассмотрим ещё одну последовательность распределений:*

$$\mathcal{Q}_n(A) = \frac{\int\limits_A e^{-ng(x)}\,\mu(dx)}{\int\limits_D e^{-ng(x)}\,\mu(dx)}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда обе последовательности распределений $\mathcal{P}_n$ *и* $\mathcal{Q}_n$ *слабо сходятся или не сходятся одновременно, и, если сходятся, то предельные распределения совпадают.*

Другой подход в одномерном случае

Пусть $f(x)$ суммируемая непрерывная ограниченная неотрицательная функция на $D = [a, b]$ имеет m глобальных максимумов:

$$\{x \mid f(x) = \max_{y \in [a,b]} f(y)\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}.$$

Пусть $c_0 = a, c_m = b$, и $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ — некоторые точки между экстремумами.

$$\xi_n : p_{\xi_n}(x) = \frac{f^n(x)}{\int\limits_a^b f^n(y)\,dy}$$

Другой подход в одномерном случае

Лемма

Пусть

1. $$\frac{\int\limits_{c_k}^{x} f^n(y)dy}{\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f^n(y)dy} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{I}_{(x_{k+1},c_{k+1}]}(x), \qquad x \in (c_k, c_{k+1}),\ k < m.$$
2. $$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f^n(y)dy}{\int\limits_{c_0}^{c_m} f^n(y)dy} = p_k, \qquad k < m.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(\xi_n) \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Заключение

В общем случае был получен результат:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)} = \frac{\mu(A\cap M)}{\mu(M)}, \quad \mu(M)>0,$$

и правдоподобное предположение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(\{x\in A \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}{\mu(\{x\in D \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}, \quad \mu(M)=0.$$

В одномерном случае получены результаты:

- Дискретный случай — дискретное равномерное распределение на модах.
- Непрерывный случай , $\mu(M)=0$ — дискретное на экстремумах, вероятности зависят от гладкости целевой функции в районе глобальных экстремумов.
- Непрерывный случай , $\mu(M)>0$ — равномерное распределение на M.
- Есть разнообразные примеры (посчитаны двумя способами), подкрепляющие теоретические результаты.

Заключение

В общем случае был получен результат:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)} = \frac{\mu(A\cap M)}{\mu(M)}, \quad \mu(M)>0,$$

и правдоподобное предположение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\ \mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\ \mu(dx)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(\{x\in A \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}{\mu(\{x\in D \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}, \quad \mu(M)=0.$$

В одномерном случае получены результаты:

- Дискретный случай — дискретное равномерное распределение на модах.
- Непрерывный случай , $\mu(M)=0$ — дискретное на экстремумах, вероятности зависят от гладкости целевой функции в районе глобальных экстремумов.
- Непрерывный случай , $\mu(M)>0$ — равномерное распределение на M.
- Есть разнообразные примеры (посчитаны двумя способами), подкрепляющие теоретические результаты.

Заключение

В общем случае был получен результат:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)} = \frac{\mu(A\cap M)}{\mu(M)}, \quad \mu(M) > 0,$$

и правдоподобное предположение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\;\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\;\mu(dx)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(\{x\in A \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}{\mu(\{x\in D \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}, \quad \mu(M) = 0.$$

В одномерном случае получены результаты:

- Дискретный случай — дискретное равномерное распределение на модах.
- Непрерывный случай , $\mu(M) = 0$ — дискретное на экстремумах, вероятности зависят от гладкости целевой функции в районе глобальных экстремумов.
- Непрерывный случай , $\mu(M) > 0$ — равномерное распределение на M.
- Есть разнообразные примеры (посчитаны двумя способами), подкрепляющие теоретические результаты.

Заключение

В общем случае был получен результат:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)}=\frac{\mu(A\cap M)}{\mu(M)},\quad \mu(M)>0,$$

и правдоподобное предположение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_A f^n(x)\;\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\;\mu(dx)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu(\{x\in A\mid 1-\varepsilon\le f(x)\})}{\mu(\{x\in D\mid 1-\varepsilon\le f(x)\})},\quad \mu(M)=0.$$

В одномерном случае получены результаты:

- Дискретный случай — дискретное равномерное распределение на модах.
- Непрерывный случай , $\mu(M)=0$ — дискретное на экстремумах, вероятности зависят от гладкости целевой функции в районе глобальных экстремумов.
- Непрерывный случай , $\mu(M)>0$ — равномерное распределение на M.
- Есть разнообразные примеры (посчитаны двумя способами), подкрепляющие теоретические результаты.

Заключение

В общем случае был получен результат:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\,\mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\,\mu(dx)} = \frac{\mu(A\cap M)}{\mu(M)}, \quad \mu(M) > 0,$$

и правдоподобное предположение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int\limits_A f^n(x)\ \mu(dx)}{\int\limits_D f^n(x)\ \mu(dx)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(\{x\in A \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}{\mu(\{x\in D \mid 1-\varepsilon \le f(x)\})}, \quad \mu(M) = 0.$$

В одномерном случае получены результаты:

- Дискретный случай — дискретное равномерное распределение на модах.
- Непрерывный случай , $\mu(M) = 0$ — дискретное на экстремумах, вероятности зависят от гладкости целевой функции в районе глобальных экстремумов.
- Непрерывный случай , $\mu(M) > 0$ — равномерное распределение на M.
- Есть разнообразные примеры (посчитаны двумя способами), подкрепляющие теоретические результаты.