Многоуровневый метод Монте-Карло

Евстафьев Егор Витальевич, 422-я группа

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д. ф.-м. н. С. М. Ермаков
Рецензент — к. ф.-м. н. Т. М. Товстик

Санкт-Петербург
2015г.

Метод выделения главной части

Пусть ξ, η — случайные величины, $\mathbb{E}\eta$ — известно.

$$\mathbb{E}\xi \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\xi_i - \lambda\left(\eta_i - \mathbb{E}\eta\right)\right].$$

При оптимальном выборе λ уменьшение дисперсии оценки (по сравнению с классическим методом) в $1-\rho^2$ раз, где $\rho = \operatorname{cor}(\xi, \eta)$.

Отличия многоуровневого метода Монте-Карло:

- $\mathbb{E}\eta$ неизвестно и должно быть оценено;
- $\lambda = 1$.

Метод выделения главной части

Пусть ξ, η — случайные величины, $\mathbb{E}\eta$ — известно.

$$\mathbb{E}\xi \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\xi_i - \lambda \left(\eta_i - \mathbb{E}\eta\right)\right].$$

При оптимальном выборе λ уменьшение дисперсии оценки (по сравнению с классическим методом) в $1 - \rho^2$ раз, где $\rho = \operatorname{cor}(\xi, \eta)$.

Отличия многоуровневого метода Монте-Карло:

- $\mathbb{E}\eta$ неизвестно и должно быть оценено;
- $\lambda = 1$.

Многоуровневый метод Монте-Карло

Последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_L$.

$$\mathbb{E}\xi_L = \mathbb{E}\xi_0 + \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{E}\left[\xi_\ell - \xi_{\ell-1}\right].$$

Оценка:

$$\mathbb{E}\xi_L \approx \frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0} \xi_{0,i}^{(0)} + \sum_{\ell=1}^{L}\left[\frac{1}{N_\ell}\sum_{i=1}^{N_\ell}\left(\xi_{\ell,i}^{(\ell)} - \xi_{\ell-1,i}^{(\ell)}\right)\right].$$

Сокращение трудоемкости:

- V_L/V_0, если $\sqrt{V_\ell C_\ell}$ возрастает с увеличением уровня;
- C_0/C_L, если $\sqrt{V_\ell C_\ell}$ убывает с увеличением уровня.

Постановка задачи

- В (Stefan Heinrich, 1999) предложено использовать метод при вычислении параметрических интегралов;
- Решение интегральных уравнений методом Монте-Карло можно свести к вычислению параметрического интеграла.

Задачи:

- Реализовать алгоритм многоуровневого метода Монте-Карло;
- Изучить особенности метода при решении интегральных уравнений.

Постановка задачи

- В (Stefan Heinrich, 1999) предложено использовать метод при вычислении параметрических интегралов;
- Решение интегральных уравнений методом Монте-Карло можно свести к вычислению параметрического интеграла.

Задачи:

- Реализовать алгоритм многоуровневого метода Монте-Карло;
- Изучить особенности метода при решении интегральных уравнений.

Интегрирование по параметру

Задача аппроксимации

$$u(\lambda) = \int\limits_0^1 f(\lambda, t)\, dt$$

как функции от $\lambda \in \Lambda = [0, 1]$.

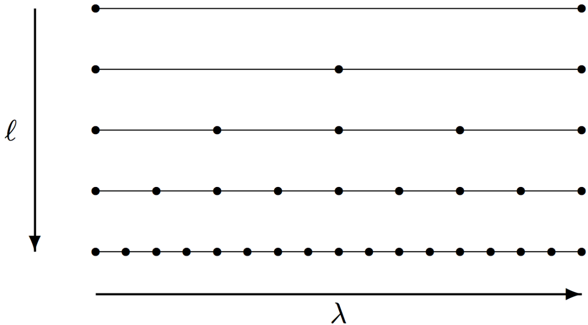
Классический метод Монте-Карло:

$$\left\{ \lambda_j = \frac{j}{n},\ j = 1, 2, \ldots, n \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$u(\lambda) \approx (P\hat{u})(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \hat{u}(\lambda_j)\varphi_j(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} (\mathrm{P} f(\cdot, \xi_i))(\lambda).$$

Интегрирование по параметру

Многоуровневый метод Монте-Карло:



$$u(\lambda) \approx \eta(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{L} \frac{1}{N_\ell} \sum_{i=1}^{N_\ell} (\mathrm{P}_\ell - \mathrm{P}_{\ell-1}) f\left(\cdot, \xi_i^{(\ell)}\right)(\lambda), \text{ где } \mathrm{P}_{-1} \equiv 0.$$

Интегрирование по параметру

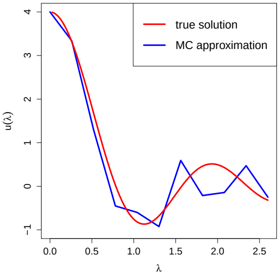
Ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(n^{-1} + N^{-1/2}) \Rightarrow n = \mathcal{O}(N^{1/2})$.

Классический метод:
Ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(N^{-1/2})$;
Трудоемкость $\mathcal{O}(N^{3/2})$.

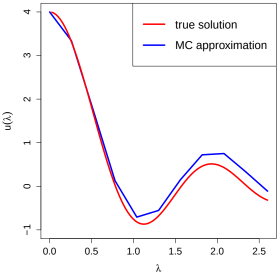
Многоуровневый метод: (Stefan Heinrich, 1999)
Ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(N^{-1/2})$;
Трудоемкость $\mathcal{O}(N)$.

Один и тот же набор случайных величин используется для оценки $\mathbb{E} f(x,\lambda)$ при каждом $\lambda \in \Lambda$.

Рассмотрим $g(\lambda) = \int\limits_0^4 \cos(\lambda x)\,dx = \lambda^{-1}\sin(4\lambda)$.



(a) Использование независимых испытаний.



(b) Использование зависимых испытаний.

Рис.: Аппроксимация $g(\lambda)$ методом Монте-Карло.

Решение интегральных уравнений

$$\varphi(x) = \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x).$$

Марковская цепь с параметрами:

- плотность начального распределения $\pi(x)$,
- переходная плотность $p(x,y)$,
- $\int\limits_G p(x,y)\,dy = 1 - g(x)$, где $g(x)$ — вероятность поглощения.

$$u(\lambda) = \langle h_\lambda, \varphi\rangle = \mathbb{E}_\omega \theta(\omega,\lambda),$$

где θ — оценка, построенная по траектории $\omega = (x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$.

$E_\omega \theta(\omega,\lambda) = \int\limits_\Omega \theta(\omega,\lambda)\,dP(\omega)$ — параметрический интеграл.

Выявленные особенности

Задача аппроксимации $\varphi(x)$ внутри области G.

$$G = \Lambda,$$
$$h_\lambda(x) = \delta(x - \lambda) \Rightarrow \langle h_\lambda, \varphi \rangle = \varphi(x).$$

Прямая оценка по столкновениям:

$$\xi(\omega, \lambda) = \frac{h_\lambda(x_0)}{\pi(x_0)} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{K(x_0, x_1) \ldots K(x_{k-1}, x_k) f(x_k)}{p(x_0, x_1) \ldots p(x_{k-1}, x_k)},$$

где $\omega = (x_0, x_1, \ldots), x_0 = \lambda$.

Метод зависимых испытаний: $\xi(\omega, \lambda) = \xi(\alpha_1, \ldots, \alpha_Z; \lambda)$, но Z зависит от λ.

Выявленные особенности

Задача аппроксимации $\varphi(x)$ внутри области G.

$$G = \Lambda,$$
$$h_\lambda(x) = \delta(x - \lambda) \Rightarrow \langle h_\lambda, \varphi \rangle = \varphi(x).$$

Прямая оценка по столкновениям:

$$\xi(\omega, \lambda) = \frac{h_\lambda(x_0)}{\pi(x_0)} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{K(x_0, x_1) \dots K(x_{k-1}, x_k) f(x_k)}{p(x_0, x_1) \dots p(x_{k-1}, x_k)},$$

где $\omega = (x_0, x_1, \dots), x_0 = \lambda$.

Метод зависимых испытаний: $\xi(\omega, \lambda) = \xi(\alpha_1, \dots, \alpha_Z; \lambda)$, но Z зависит от λ.

Выявленные особенности

Задача аппроксимации $\varphi(x)$ внутри области G.

$$G = \Lambda,$$
$$h_\lambda(x) = \delta(x - \lambda) \Rightarrow \langle h_\lambda, \varphi \rangle = \varphi(x).$$

Сопряженная оценка по столкновениям:

$$\xi^*(\omega, \lambda) = \frac{f(x_0)}{\pi(x_0)} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{K(x_1, x_0) \dots K(x_k, x_{k-1}) h_\lambda(x_k)}{p(x_0, x_1) \dots p(x_{k-1}, x_k)},$$

с вероятностью 1: $\xi^*(\omega, h_\lambda) = 0$.

Решение: $h_\lambda(x) = C_\lambda \exp\left(-\frac{(x-\lambda)^2}{\alpha}\right), \ \ \lim\limits_{\alpha \to 0} \langle h_\lambda, \varphi \rangle = \varphi(x)$.

Описание экспериментов

$$\varphi(x) = \int\limits_G K(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x),$$

где

$$G = \Lambda = [-2, 2],$$
$$\varphi(x) = 10 + \cos(2x),$$
$$K(x,y) = C_K\,(16 - (x-y)^2).$$

Параметры марковской цепи:
$p(x,y) = C_p\,|K(x,y)|$,
для сопряженной оценки: $\pi(x) = C_\pi\,|f(x)|$.

$\varphi(x) = 10 + \cos(2x), N = 10^4.$

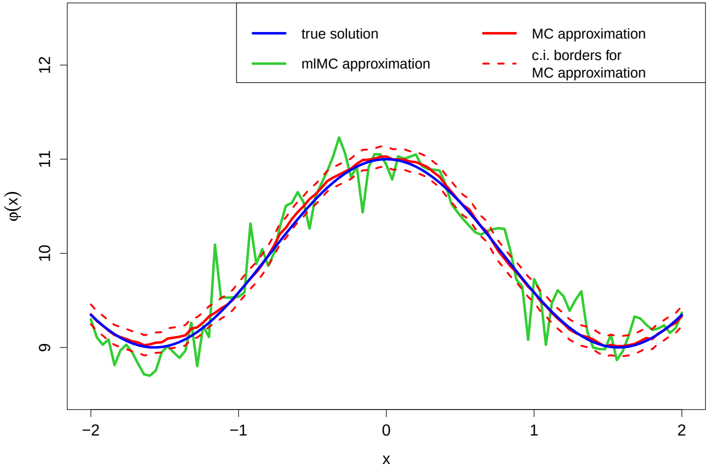


Рис.: Аппроксимация φ с использованием прямой оценки.

Результаты, сопряженная оценка

$\varphi(x) = 10 + \cos(2x), N = 10^4, \alpha = 0.3.$

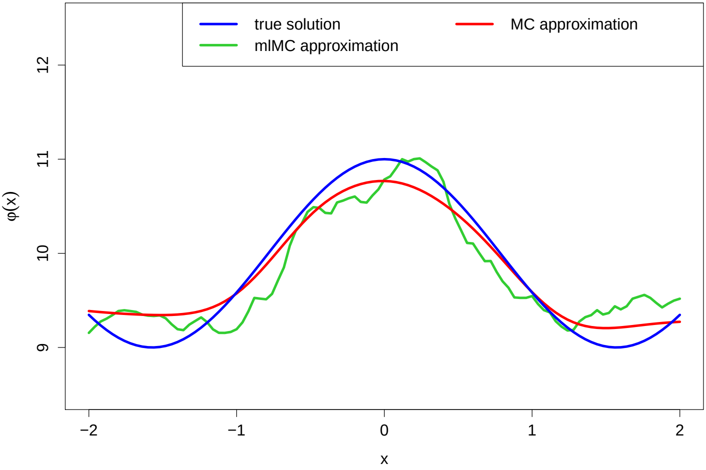


Рис.: Аппроксимация φ с использованием сопряженной оценки.

Подведение итогов

- Рассмотрен многоуровневый метод Монте-Карло и его применение к параметрическому интегрированию на основе (Stefan Heinrich, 1999).
- Исправлено несколько неточностей в (Stefan Heinrich, 1999), в частности, связанных с использованием метода зависимых испытаний.
- Реализовано применение многоуровневого метода Монте-Карло для решения интегральных уравнений.
- Численные эксперименты позволяют говорить о неоправданности применения многоуровневого аналога метода Монте-Карло способом, описанным в (Stefan Heinrich, 1999), к решению интегральных уравнений.