Метод стохастической сетки для оценки стоимости американского опциона

Щёкина Анна Алексеевна, гр. 422

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — **к. ф.-м. н. Каштанов Ю.Н.**
Рецензент — **к. ф.-м. н. Гормин А.А.**

Санкт-Петербург
2015г.

План доклада

1. Введение
   - Постановка задачи
   - Примеры
   - Регулярная сетка
2. Стохастическая сетка
   - Варианты выбора переходных вероятностей
   - Оценка
   - Диффузия со скачками
   - Состоятельность
3. Численные результаты
   - Реализация сетки
   - Теоретическая аппроксимация
   - Сходимость регулярной сетки со скачками
   - Состоятельность стохастической сетки со скачками

План доклада

1. Введение
   - Постановка задачи
   - Примеры
   - Регулярная сетка
2. Стохастическая сетка
   - Варианты выбора переходных вероятностей
   - Оценка
   - Диффузия со скачками
   - Состоятельность
3. Численные результаты
   - Реализация сетки
   - Теоретическая аппроксимация
   - Сходимость регулярной сетки со скачками
   - Состоятельность стохастической сетки со скачками

Постановка задачи

$x_n = (x_n^1, \dots, x_n^d)$ — марковский процесс в $\mathbb{R}^d$, $n \le N$.
$p_n(x, y)$ — переходные вероятности.
В частности, $x_n = x_{t_n}$, где x_t — диффузионный процесс.

$f_n(x_0, \dots, x_n)$ — функции выплаты на шаге n.
Проблема из теории оптимальной остановки:

$$\mathcal{C} = \sup_{\tau < N} \mathbb{E} f_\tau,$$

τ — арбитражный марковский момент.

$f_n = f_n(x_n)$, тогда $\mathcal{C}$ можно вычислить обратной рекурсией:

$$Y_N(x) = f_n(x), \quad Y_n(x) = \max(f_n(x), \mathbb{E}_{n,x} Y_{n+1}(x_{n+1})), \quad \mathcal{C} = Y_0(x_0).$$

Примеры

1. Оценка стоимости американского опциона

   Например, опцион геометрического среднего:

$$f_n = \left(\left(\prod_{i=1}^{d} S_n^i \right)^{1/d} - K \right)^+ ,$$

   $S_n^i = e^{x_n^i}$ — цены акций, K — цена исполнения.

2. Продажа активов

$$f_n = \sum_{i=1}^{d} S_n^i - K,$$

   S_n^i — цены активов (имущество, акции,..), K — цена транзакции.

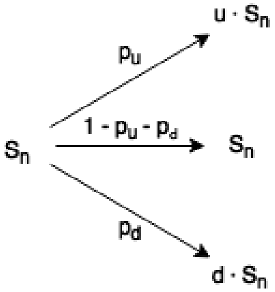
3. Прекращение добычи ресурса

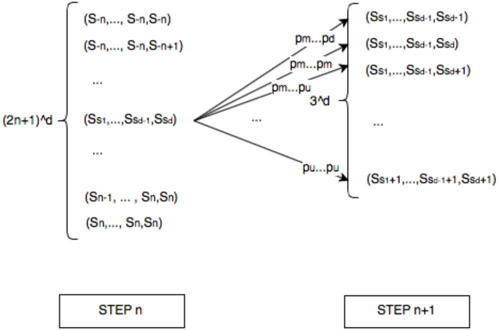
$$f_n = \sum_{t=0}^{n} (e^{-\lambda t} S_t - K) + e^{-\lambda n} S_n,$$

   S_n - цена ресурса (нефть, газ,..), λ — уровень добычи ресурса, K — производственные расходы.

Регулярная сетка

Детерминированное дерево значений:





Трудоёмкость экспоненциально возрастает с d.

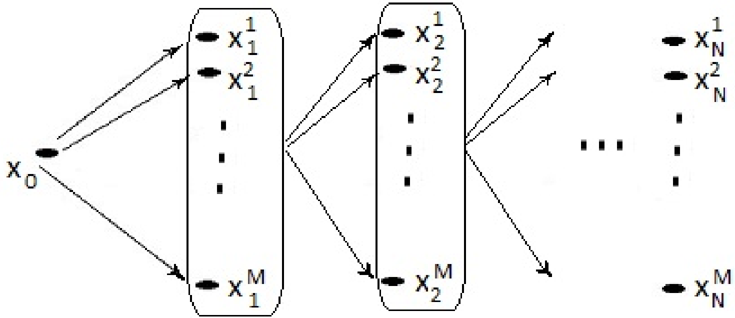
План доклада

Стохастическая сетка

Броуди и Глассерман [2004] предложили метод стохастической сетки, существенно не зависящий от d.

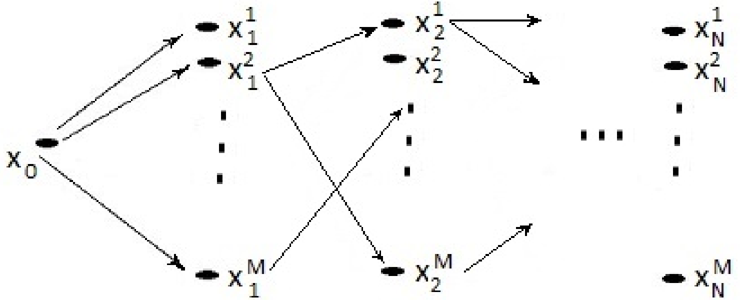
На каждом шаге n строится набор случайных величин $\bar{x}_n = \{x_n^i\}_{i=1}^M$ ("сетка") как цепь Маркова с переходными вероятностями:

$$\bar{q}_n(\bar{x}, d\bar{y}) = q_{n,1}(\bar{x}, dy_1) \ldots q_{n,M}(\bar{x}, dy_M).$$



Усреднённые вероятности

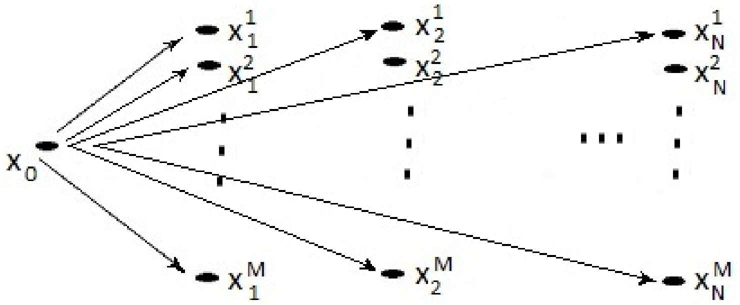
$$q_{n,j}(\bar{x}, dy_j) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p_n(x_{n-1}^i, dy_j).$$



Маргинальные вероятности

Пусть известны переходные вероятности за несколько шагов $p_{k,n}(x, dy)$, например, $p_n(x, dy)$ — Гауссовские.

$$q_{n,j}(\bar{x}, dy_j) = p_{0,n}(x_0, dy_j).$$



Оценка

Определим плотность $\rho_{n,j}(\bar{x}, x, dy) = p_n(x, y)/q_{n,j}(\bar{x}, y)$.
$Y_n(j) = Y_n(x_n^j)$, $\rho_n(x, j) = \rho_{n,j}(\bar{x}_{n-1}, x, x_n^j)$, $\rho_n(i, j) = \rho_n(x_{n-1}^i, j)$.

Рекурсивно построим случайную последовательность:

$$\check{Y}_N(i) = f_N(x_N^i), \quad \check{Y}_n(i) = \max\left(f_n(x_N^i), \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \rho_{n+1}(i, j)\check{Y}_{n+1}(j)\right).$$

При условии $\mathbb{E}\left[\rho_1(x_0, j)\ldots\rho_n(j_{n-1}, j_n)Y_n(j_n)\right]^2 < \infty, \; n = 1, \ldots, N$
выполнено неравенство:

$$\mathbb{E}(\check{Y}_0 - \mathcal{C})^2 \leq C/M,$$

то есть $\check{Y}_0$ — состоятельная оценка для $\mathcal{C}$ при $M \to \infty$.

Диффузия со скачками

$$x_n - x_{n-1} = \Delta x_n = \Delta x'_n + \Delta x''_n, \quad \Delta x'_n \sim N(b_n, a_n\sqrt{\Delta t}), \quad \Delta x''_n \sim \nu_n(\cdot),$$

a_n — матрицы $d \times m$, $A_n = a_n a_n^T \Delta t$, $\nu_n(\cdot)$ — скачковое распределение.

$\varphi(B, x) = c\exp(-0.5(Bx, x))$, $\varphi_n(x, y, h) = \varphi(A_n^{-1}, x - y + b_n + h)$.

$$p_n(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x, y, h)\nu_n(dh).$$

Если $\forall\ \beta > 0\ \exists\ \beta_1\ \int_{\mathbb{R}^d} exp(-\beta|z + h|^2) \leq exp(-\beta_1|z|^2)$, то:

$$p_n(x, y) \leq C\varphi(\bar{a}^{-1}I, x - y), \quad C,\ \bar{a} = const.$$

Состоятельность

Теорема

Пусть $\inf\limits_{||z||=1}(A_n z, z) \geq \bar{A}_0 > 0$ и

$$Y_n(x) \leq \sum_{i=1}^{d} c_i(e^{k_i x_i} + 1).$$

Тогда оценка с усреднёнными переходными вероятностями состоятельна.

Замечание (в условиях теоремы)

Пусть скачковое распределение позволяет использовать маргинальные вероятности. Можно показать, что:

$$\mathbb{E}\check{Y}_0^2 = \infty,$$

если $f_n(x) > \epsilon$ для $x > K$ или $x < -K$ для некоторых $\epsilon, K > 0$.

Модифицированная схема рекурсии

Пусть сетка моделируется с переходными вероятностями:

$$q_{n,j}(\bar{x}, dy_j) = q_n(y)dy = \varphi((sn)^{-1}I, x_0 - y). \qquad (1)$$

Рассмотрим следующую модификацию схемы рекурсии (Каштанов [2013]):

$$\check{Y}_N(i) = f_N(x_N^i), \quad \check{Y}_n(i) = \max\left(f_n(x_n^i), \frac{\sum_{j=1}^{M} \rho_{n+1}(i,j)\check{Y}_{n+1}(j)}{\sum_{j=1}^{M} \rho_{n+1}(i,j)}\right). \qquad (2)$$

Теорема

Пусть $f_n(x) \le F$ и $s > \bar{a}/2$. Тогда оценка с переходными вероятностями (1) состоятельна для схемы (2).

План доклада

Реализация сетки

Опцион геометрического среднего с d независимыми о.р. акциями.

Скачковое распределение сосредоточено в точке δ.

$$dS_t/S_t = (r-q)dt + \sigma dW_t + \delta d\pi_t - \delta\lambda dt,$$

π_t — Пуассоновский процесс с интенсивностью λ, r — ставка, q — дивиденды, σ — волатильность.

Переходная плотность приближается:

$$p(x,y) \approx (1-e^{-\lambda\Delta t})\varphi((\sigma^2\Delta t)^{-1}, y-x-\mu\Delta t)+$$
$$e^{-\lambda\Delta t}\varphi((\sigma^2\Delta t)^{-1}, y-x-\mu\Delta t - \ln(1+\delta)).$$

Теоретическая аппроксимация

Для бесконечного горизонта и $d = 1$ известна цена (Øksendal [2005]):

$$\mathcal{C}(S_0) = \begin{cases} C(S_0)^{\mu_1}, & 0 < x < x^* \\ S_0 - K, & x \geq x^* \end{cases},$$

$$x^* = \frac{\mu_1 K}{\mu_1 - 1}, \quad C = \frac{1}{\mu_1}(x^*)^{1-\mu_1}, \quad \mu_1 - \text{корень}$$

$$h(\mu) = -r + (r-q)\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\mu(\mu-1) + \lambda\left[(1+\delta)^\mu - 1 - \mu\delta\right].$$

$$q = 0.08,\ \sigma = 0.2,\ r = 0.05,\ \delta = -0.3,\ \lambda = 0.5,\ S(0) = K = 100. \tag{3}$$

$$x^* \approx 180.2,\ C \approx 0.0007,\ \mathcal{C} \approx 21.3569.$$

Сходимость регулярной сетки со скачками

График 1 демонстрирует сходимость регулярной сетки со скачками при $T \to \infty$ к теоретической аппроксимации (Øksendal [2005]).

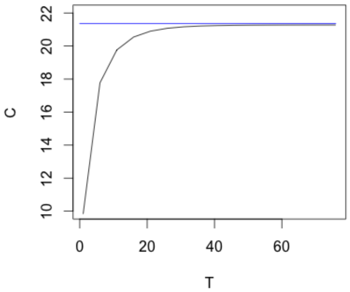


Рис. 1: Сходимость регулярной сетки со скачками к теоретической аппроксимации, $\Delta t \approx 0.5$ дня, параметры (3)

Состоятельность стохастической сетки со скачками

Таблица 1 демонстрирует состоятельность оценки стохастической сетки со скачками при $M \to \infty$. В таблицу включены усреднённые значения и статистические ошибки, соответствующие 99% доверительному интервалу.

Таблица 1: Состоятельность стохастической сетки со скачками для $d = 1$ и $d = 5$, 10 итераций, $T = 1$, $N = 6$, параметры (3)

d	1			5		
Estimator	ST MOD MG		RM	ST MOD MG		RM
M	Value	Error	Value	Value	Error	Value
1200	9.967	0.187	9.858	3.058	0.151	3.091
2400	9.850	0.122		3.069	0.091	

Итоги

- Изучены методы стохастической и регулярной сеток.
- Рассмотрены вопросы состоятельности.
- К случаю скачковой меры, сосредоточенной в 1 точке, применена теоретическая аппроксимация, реализованы алгоритмы сеток.
- Продемонстрирована состоятельность стохастической сетки и связь изученных методов оценки между собой.

Спасибо за внимание!