Разработка вычислительных процедур и программных средств анализа результатов парных сравнений на основе тропической математики

Севастьянова Юлия Александровна, 422-я группа

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель — д. ф.-м. н. **Н.К. Кривулин**
Рецензент — к. ф.-м. н. **Н.П. Алексеева**

Санкт-Петербург
2015г.

Постановка задачи

- Матрицы парных сравнений часто являются нетранзитивными.
- Тропическая математика предоставляет эффективный и универсальный подход для аппроксимации таких матриц согласованными.
- *Задачи*:
  - разработать вычислительные процедуры, упрощающие нахождение согласованной матрицы;
  - вывести тропический аналог метода анализа иерархий (МАИ) и провести сравнение с традиционным МАИ;
  - создать программные средства, реализующие алгоритм нахождения согласованной матрицы.

Постановка задачи

- Матрицы парных сравнений часто являются нетранзитивными.
- Тропическая математика предоставляет эффективный и универсальный подход для аппроксимации таких матриц согласованными.
- ***Задачи***:
  - разработать вычислительные процедуры, упрощающие нахождение согласованной матрицы;
  - вывести тропический аналог метода анализа иерархий (МАИ) и провести сравнение с традиционным МАИ;
  - создать программные средства, реализующие алгоритм нахождения согласованной матрицы.

Элементы тропической математики

$(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ - идемпотентное полуполе, если

- $\mathbb{X}$ - непустое множество, замкнутое относительно коммутативных и ассоциативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, и включает в себя $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$.
- $x \oplus x = x$,
- $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z$,
- $\forall x \neq \mathbb{0} \; \exists x^{-1} : x^{-1} \otimes x = \mathbb{1}$.

Примеры идемпотентных полей:

- $\mathbb{R}_{max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +, -\infty, 0)$
- $\mathbb{R}_{max,\times} = (\mathbb{R}_{+}, max, \times, 0, 1)$

- Мультипликативно-сопряженная матрица

$$\mathbf{A}^{-} = (a_{ij}^{-}) = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & a_{ji} \neq \mathbb{0}, \\ \mathbb{0}, & a_{ji} = \mathbb{0}. \end{cases}$$

- Вектор, который не имеет нулевых компонент, называется *регулярным*.
- Расстояние между матрицами без нулевых элементов

$$\rho(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}^{-}\mathbf{B}) \oplus tr(\mathbf{B}^{-}\mathbf{A}).$$

- Любая матрица порядка n имеет спектральный радиус

$$\lambda = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(\mathbf{A}^{m}).$$

- $\mathbf{A}$ - матрица парных сравнений
- $\mathbf{X}$ - согласованная матрица
- ϕ - некоторый критерий

Задача аппроксимации

$$\min_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{A}, \mathbf{X}). \tag{1}$$

Теорема 1 (Кривулин, 2013)

Пусть $\boldsymbol{x}$ - общее регулярное решение задачи (1), где матрица $\boldsymbol{A}$ имеет спектральный радиус $\lambda > \mathbb{0}$, и пусть $\boldsymbol{A}_\lambda = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_\lambda^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A}_\lambda \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{A}_\lambda^{n-1}$.
Тогда минимум в задаче (1) равен λ, а общее решение имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_\lambda^* \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n.$$

Пример нахождения вектора альтернатив

Для общего вида матрицы 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & a & b \\ a^{-1} & \mathbb{1} & c \\ b^{-1} & c^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

по результатам теоремы 1 получен результат

$$\mathbf{A}_\lambda^* = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \lambda^{-1}a \oplus \lambda^{-2}bc^{-1} & \lambda^{-1}b \oplus \lambda^{-2}ac \\ \lambda^{-1}a^{-1} \oplus \lambda^{-2}b^{-1}c & \mathbb{1} & \lambda^{-1}c \oplus \lambda^{-2}a^{-1}b \\ \lambda^{-1}b^{-1} \oplus \lambda^{-2}a^{-1}c^{-1} & \lambda^{-1}c^{-1} \oplus \lambda^{-2}ab^{-1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы коллинеарны, в качестве ответа берется первый столбец

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ a^{-2/3}b^{-1/3}c^{1/3} \\ a^{-1/3}b^{-2/3}c^{-1/3} \end{pmatrix}.$$

Случай нескольких матриц

Задача аппроксимации

$$\min_{\mathbf{X}} \max_{1 \le i \le m} \phi(\mathbf{A}_i, \mathbf{X}). \qquad (2)$$

Теорема 2 (Кривулин, 2013)

Пусть $\mathbf{x}$ *— общее регулярное решение в смысле* $\mathbb{R}_{\max,\times}$ *задачи (2).* $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_m$ *— матрица с собственным числом* $\mu > \mathbb{0}$*, и* $\mathbf{B}_\mu = \mu^{-1}\mathbf{B}$*,* $\boldsymbol{B}_\mu^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B}_\mu \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{B}_\mu^{n-1}$*. Тогда минимум в задаче (2) равен* μ*, а общее решение имеет вид*

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_\mu^* \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ *— произвольный ненулевой вектор.*

МАИ

Стоит задача выбора лучшей альтернативы по некоторым критериям.

- **C** - матрица парных сравнений критериев
- $\mathbf{A}_i$ - матрицы парных сравнений альтернатив по каждому из критериев

Вектор приоритетов соответствует максимальному собственному числу матрицы парных сравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_{\max}\mathbf{v}.$$

Алгоритм решения:

- найти вектор рейтингов **w** для **C**,
- по каждой из $\mathbf{A}_i$ найти вектор приоритетов $\mathbf{v}_i$,
- из $\mathbf{v}_i$ составить матрицу **A**,
- искомый вектор $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{w}$.

Стоит задача выбора лучшей альтернативы по некоторым критериям.

- $\mathbf{C}$ - матрица парных сравнений критериев
- $\mathbf{A}_i$ - матрицы парных сравнений альтернатив по каждому из критериев

Вектор приоритетов соответствует максимальному собственному числу матрицы парных сравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_{\max}\mathbf{v}.$$

Алгоритм решения:

- найти вектор рейтингов $\mathbf{w}$ для $\mathbf{C}$,
- по каждой из $\mathbf{A}_i$ найти вектор приоритетов $\mathbf{v}_i$,
- из $\mathbf{v}_i$ составить матрицу $\mathbf{A}$,
- искомый вектор $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{w}$.

Введем w_i - вес i-го критерия. Тогда задача аппроксимации имеет вид

$$\min_{\mathbf{X}} \max_{1 \le i \le m} w_i \phi(\mathbf{A}_i, \mathbf{X}). \tag{3}$$

Теорема 3

Пусть $\mathbf{x}$ *— общее регулярное решение в смысле* $\mathbb{R}_{\max,\times}$ *задачи (3).*
$\mathbf{B} = w_1 \mathbf{A}_1 \oplus \ldots \oplus w_m \mathbf{A}_m$ *— матрица с собственным числом* $\mu > \mathbb{0}$, *и* $\mathbf{B}_\mu = \mu^{-1} \mathbf{B}$,
$\boldsymbol{B}_\mu^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{B}_\mu \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{B}_\mu^{n-1}$.
Тогда минимум в задаче (2) равен μ, *а общее решение имеет вид*

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_\mu^* \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u}$ *— произвольный ненулевой вектор.*

Результаты тропического аналога МАИ не всегда совпадают с результатами традиционного метода.

Преимущества:

- находит ответ в явном виде, а не итерационно;
- считает взвешенную сумму самих матриц, а не полученных по ним векторам;
- предоставляет несколько вариантов решения.

Описание программных средств

- Алгоритм реализован на основе теоремы 3 о тропическом варианте МАИ
- Язык программирования C
- Среда разработки Microsoft Visual Studio Ultimate 2013

Этапы разработки:

1. алгоритм поиска вектора приоритетов для случая одной матрицы;
2. модификация для случая нескольких матриц;
3. введение дополнительной оценки для матрицы парных сравнений критериев.

Описание программных средств

Реализованы функции:

- элементарных операций над матрицами в тропической математике;
- поиска следа, спектрального радиуса;
- алгоритма явного нахождения вектора рейтингов альтернатив.

Работа алгоритма:

- чтение матриц из файла;
- случай многокритериальной задачи;
- поиск матрицы $\mathbf{B}_{\lambda}^{*}$, задающей общий вид решения

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_{\mu}^{*}\mathbf{u};$$

- печать в файл результата - столбца матрицы $\mathbf{A}_{\lambda}^{*}$, задающего согласованную матрицу $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^{-}$, наиболее близкую по Евклидовой метрике к $\mathbf{A}(\mathbf{A}_i)$.

Описание программных средств

Реализованы функции:

- элементарных операций над матрицами в тропической математике;
- поиска следа, спектрального радиуса;
- алгоритма явного нахождения вектора рейтингов альтернатив.

Работа алгоритма:

- чтение матриц из файла;
- случай многокритериальной задачи;
- поиск матрицы $\mathbf{B}_\lambda^*$, задающей общий вид решения
$$\mathbf{x} = \mathbf{B}_\mu^* \mathbf{u};$$
- печать в файл результата - столбца матрицы $\mathbf{A}_\lambda^*$, задающего согласованную матрицу $\mathbf{X} = \mathbf{x}\mathbf{x}^-$, наиболее близкую по Евклидовой метрике к $\mathbf{A}(\mathbf{A}_i)$.

Результаты

Приведем результаты работы.

- Исследованы методы тропической математики, их применение к задаче парных сравнений.
- Произведены вычисления для случаев матриц разных размерностей и получены общие выводы для рассмотренных матриц.
- Разработаны программные средства, реализующие поиск вектора рейтингов альтернатив для произвольной мультипликативной матрицы.
- Проведен сравнительный анализ тропического и традиционного вариантов МАИ.