Многоуровневый анализ альтернатив в процессе принятия решений

Лозицкий Иван Павлович, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Сушков Ю.А.
Рецензент: Тамазян Г.С.

Санкт-Петербург
2015г.

Иерархия

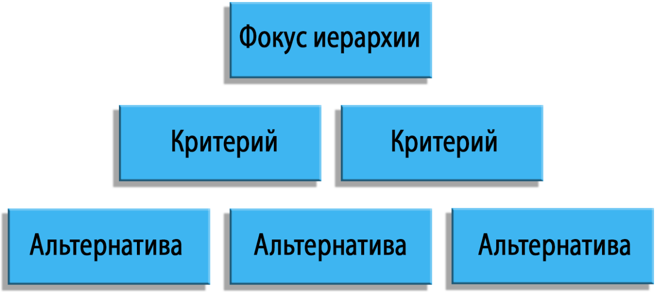

Рис.: Представление в виде иерархии.

Основные понятия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ - множество чисел, задающих качественные оценки попарных сравнений объектов, где $\lambda_{ij} \in \Lambda$ соответствует паре объектов с номерами i и j.

Определение (Шкала и функция шкалы)

Назовем функцией шкалы функцию φ, отображающую множество Λ в множество положительных вещественных чисел: $\varphi : \Lambda \to \mathbf{R}_+$, а множество значений φ назовем шкалой.

Определение (Матрица сравнений)

Под матрицей сравнений для объектов $x_1, .., x_n$ будем понимать матрицу вида:
$A = \{a_{ij}\}_{ij=1}^n = \{\varphi(\lambda_{ij})\}_{ij=1}^n$, *где* $\lambda_{ij} \in \Lambda$.

Формализация МАИ

Пусть $S = \{s_{ij}\}_{i,j \in 1:n}$ — множество альтернатив,
$\Lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i,j \in 1:m}$ — множество чисел, задающих оценки,
$R = \{R_k\}_{k \in 1:r}$ — множество критериев,
$\varphi : \Lambda \to \mathbf{R}_+$ — функция шкалы.

$\boldsymbol{f_k : S \times S \to \Lambda}$ — функция сравнения относительно R_k.
$\boldsymbol{A_k = \{\varphi(f_k(s_i, s_j))\}_{ij=1}^n}$ — матрица парных сравнений относительно R_k.
Вектор приоритетов относительно критерия R_k — вектор $\boldsymbol{(p_k(s_1), \cdots, p_k(s_n))}$, который является главным собственным вектором матрицы A_k.

Интегральным приоритетом назовем величину
$\boldsymbol{h(s_i) = w_1 p_1(s_i) + \ldots + w_r p_r(s_i)}$, где w_i приоритет критерия R_i, p_j – приоритет варианта s_i относительно критерия R_j.

Переход к иерархии шкал

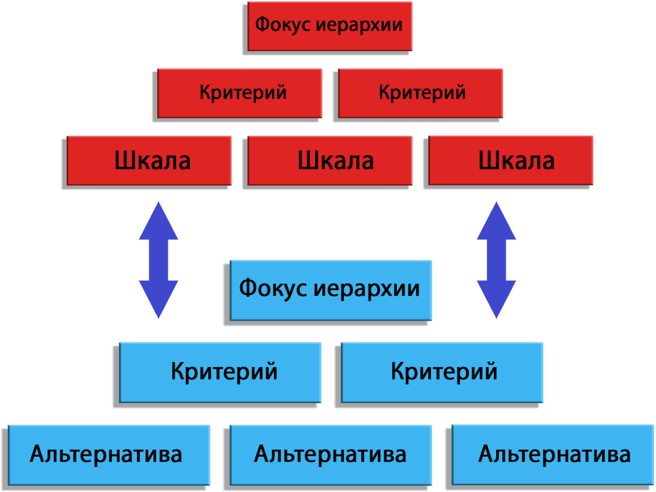

Рис.: Многоуровневая иерархия

Постановка задачи

Задача:

- Провести сравнительную оценку шкал при конкретных условиях и ограничениях;
- Определить методику построения критерия для сравнения шкал.

Основные шкалы

Шкала Саати

$$\boldsymbol{\varphi(\lambda) = (1 + |\lambda| x_s)^{sign \lambda}},$$

где x_s-параметр масштаба, $\lambda \in \Lambda$.

Шкала Брука

$$\boldsymbol{\varphi(\lambda) = c_s + \lambda \cdot x_s},$$

где x_s-параметр масштаба, c_s - центральное значение, $\lambda \in \Lambda$.

Логистическая шкала

$$\boldsymbol{\varphi_{log}(\lambda) = \frac{2}{1 + e^{-\mu \lambda}}},$$

где $\lambda \in \Lambda$, μ - параметр крутизны.

Начальное ранжирование объектов: $x_1 \succ ... \succ x_n$.
$\Lambda = -10 : 10$, элементы $\lambda_{ij} \in \Lambda$, где $i, j = 1 : n$.

Пусть λ_{ij} - независимы реализации случайной величины, имеющей равномерное распределение на Λ.

Ошибка оценки: ε_{ij}, имеет равномерное распределение на $[\varphi_{min}(\lambda_{ij}); \varphi_{max}(\lambda_{ij})]$, где φ_{min} и φ_{max} – некоторые функции, значение которых зависит от λ_{ij};

Шкала: логистическая.

Число альтернатив: $n = 5$; Количество итераций: 10000.

Устойчивость компонент ранжирования

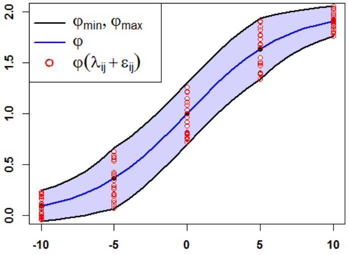

Рис.: Логистическая шкала с параметром $\mu = 0.3$.

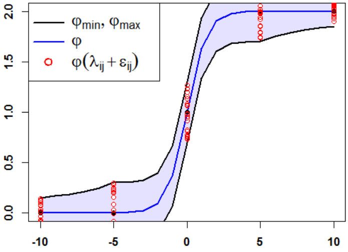

Рис.: Логистическая шкала с параметром $\mu = 1.5$.

Устойчивость компонент ранжирования. Результаты

Таблица: Вероятности появления ранжирований при наличии ошибок в выборе оценок.

Логистическая шкала, $\mu = 0.3$	
Ранжирование	Вероятность
$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$	0.9
$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4$	0.1

Логистическая шкала, $\mu = 1.5$	
Упорядочивание	Вероятность
$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$	0.3
$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4$	0.1
$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4$	0.25
$x_2 \succ x_1 \succ x_3 \succ x_4 \succ x_5$	0.35

Методика построение критерия выбора шкалы

Правила построения критерия:

1) должен быть выбран на начальном этапе;
2) необходимо строить, используя лишь качественные и количественные оценки;
3) построение критерия не должно быть трудоемким;
4) при заданных условиях и ограничениях необходимо получать один и тот же результат.

Начальные данные и условия

Начальное ранжирование объектов: $x_1 \succ ... \succ x_n$,
$\Lambda = -10 : 10$, $\Lambda_+ = 1 : 10$;
Шкалы: логистическая, Саати;

$\Delta = \{$ «Все сочетания элементов из Λ_+ длины от 1 до 5» $\}$;
$\overline{\Delta} = -\Delta$;
$\Theta = \Delta \cup \overline{\Delta}$;
$\Gamma = \Lambda \setminus \Theta$ — множество используемых качественных оценок;

Количество итераций: 10000;

Цель: провести анализ дисперсии веса первого элемента в итоговом ранжировании и оценить вероятность совпадения ранжирований исходя из множества Γ.

Вероятность совпадения ранжирований

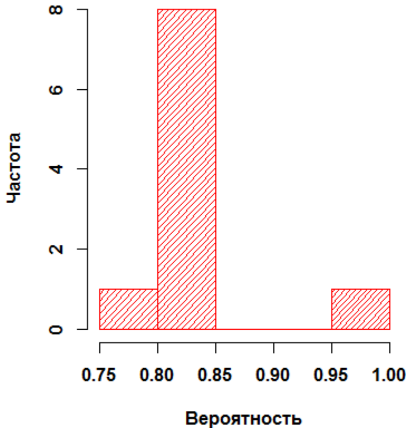

Рис.: Значения вероятности совпадения для логистической шкалы и Δ из I элемента.

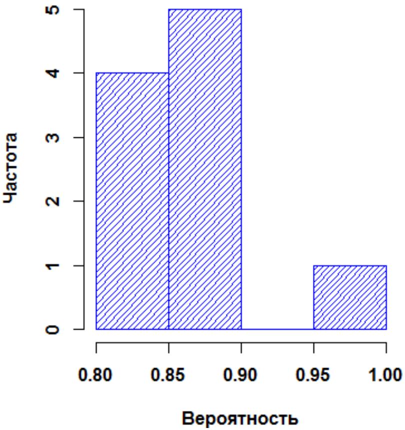

Рис.: Значения вероятности совпадения для шкалы Саати и Δ из I элемента.

Вероятность совпадения ранжирований

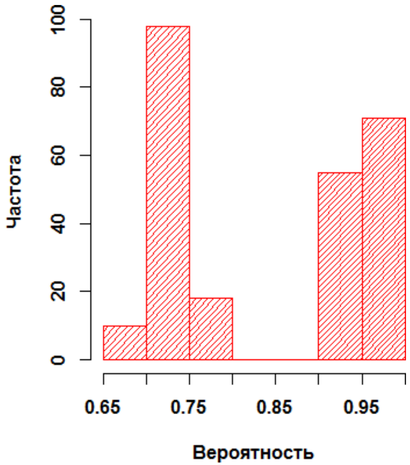

Рис.: Значения вероятности совпадения для логистической шкалы и Δ из V элементов.

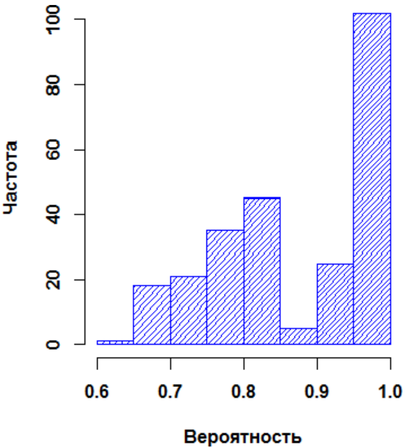

Рис.: Значения вероятности совпадения для шкалы Саати и Δ из V элементов.

Оценка вероятности совпадения ранжирований

Таблица: Оценки вероятности совпадения и соответствующий вариант множества Δ для группы «1».

Δ	$min(1)$	$Pmin(1)$	$max(1)$	$Pmax(1)$
a_1	**1**	0.97	**1**	0.97
$a_1 - a_2$	**1-4**	0.9584	**1-2**	1.00
$a_1 - a_2 - a_3$	**1-4**-6	0.9482	**1-2**-i	1.00
$a_1 - \ldots - a_4$	**1-4-5**-7	0.9386	**1-2**-i-j	1.00
$a_1 - \ldots - a_5$	**1**-3-**4-5**-6	0.9207	**1-2**-i-j-k	1.00

Таблица: Оценки вероятности совпадения и соответствующий вариант множества Δ для группы «2».

Δ	$min(2)$	$Pmin(2)$	$max(2)$	$Pmax(2)$
a_1	**3**	0.7929	2	0.8221
$a_1 - a_2$	**3-4**	0.7695	2-10	0.8101
$a_1 - a_2 - a_3$	**3-4**-7	0.745	**6-8**-10	0.7955
$a_1 - \ldots - a_4$	**3-4-5**-8	0.7216	**6-7-8**-9	0.786
$a_1 - \ldots - a_5$	2-**3-4-5**-6	0.6895	**6-7-8**-9-10	0.7897

Дисперсия веса первого элемента в ранжировании

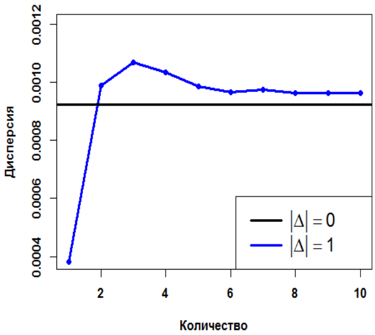

Рис.: Логистической шкала с множеством Δ из I элемента.

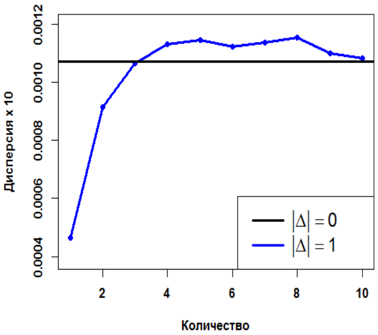

Рис.: Шкала Саати с множеством Δ из I элемента.

Дисперсия веса первого элемента в ранжировании

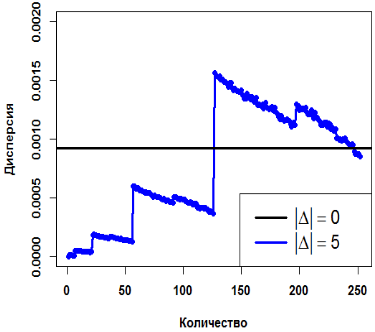

Рис.: Логистическая шкала с множеством Δ из V элементов.

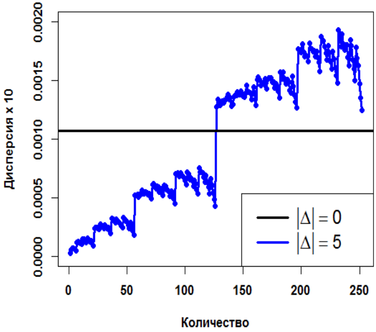

Рис.: Шкала Саати с множеством Δ из V элементов.

Результаты

1) Изучены свойства шкал в зависимости от параметров;
2) Проведено сравнение свойств шкал по нескольким признакам;
3) Выявлены закономерности, зависящие от формирования множества начальных оценок;
4) Полученные статистические данные позволяют строить критерии выбора шкал на основе только лишь множества оценок.