Стохастические методы расчета азиатского опциона

Шувалов Денис Валерьевич, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор С. М. Ермаков
Рецензент: к. ф.-м. н. Ю. Н. Каштанов

Санкт-Петербург
2015г.

Основные понятия

- Опцион - договор, предоставляющий своему владельцу право купить или продать некоторый базовый актив.
- Азиатский опцион - опцион, цена исполнения которого определяется на основе средней стоимости базового актива за определенный период времени.

Дифференциальное уравнение

Уравнение в частных производных для модели азиатского опциона имеет вид [Duffy, 2006]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + S\frac{\partial V}{\partial I} - rV = 0,$$

и соответствующие граничные условия:

$$\begin{aligned} V(0, I, t) &= g_0(I, t), \\ V(S_M, I, t) &= g_1(I, t), \\ V(S, I_M, t) &= h_0(S, t), \end{aligned}$$

где S_M, I_M заданные значения, g_0, g_1, h_0 — известные функции. Также имеет место начальное условие:

$$V(S, I, 0) = V_0(S, I).$$

Задачи

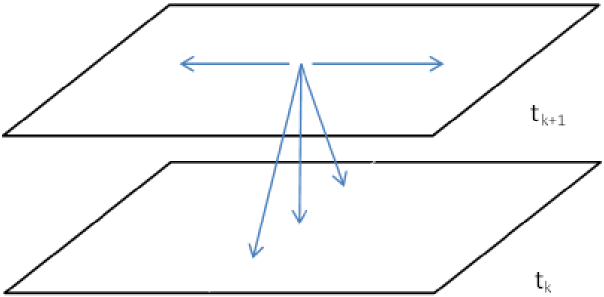
1. Составить алгоритм нахождения решения уравнения используя численные и стохастические методы.
2. Написать программу, реализующую данный алгоритм.
3. Найти число реплик на каждом временном слое, необходимое для стохастической устойчивости устойчивости.

Разностная схема

- Уравнение в более общей форме:

$$-c\frac{\partial V}{\partial t} + \beta\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + a\frac{\partial V}{\partial S} + \alpha\frac{\partial V}{\partial I} - bV = f.$$

- Разностная схема:
  - Неявная;
  - Двухслойная;
  - Решение в шести точках.



Решение СЛАУ методом Монте—Карло [Ермаков, 2009]

- СЛАУ: $X_{k+1} = AX_k + F$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$,
- Цепь Маркова:

  p_0 — начальное распределение,

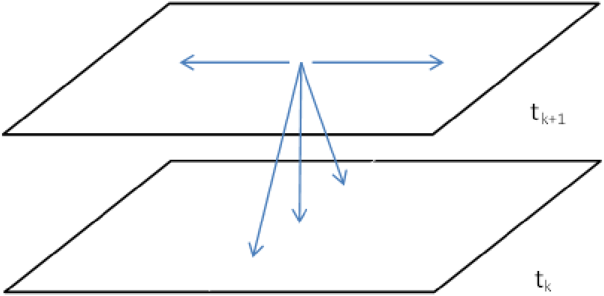
  $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — матрица переходных вероятностей, $p_{ij} = \frac{a_{ij}}{\|a_i\|}$,
- Оценка по столкновению:

$$J(i_0, \ldots, i_\tau) = \sum_{l=0}^{\tau} \frac{h_{i_0} a_{i_0 i_1} \ldots a_{i_{l-1} i_l} f_{i_l}}{p_{i_0}^0 p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{l-1} i_l}},$$

где h — заданный вектор.

Алгоритм. Схема без запоминания

- Задача: найти приближенное решение $\hat{V}(S_i, I_j)$ на слое $t = t_K$;
- СЛАУ: $V_{n+1} = A_1 V_{n+1} + A_2 V_n + f_1$;
- Случайные блуждания в R^3;
- Схема «сверху вниз»;
- Стохастическая неустойчивость.



Алгоритм. Схема с запоминанием

- Решение $V_0(S, I)$ известно на слое $t = 0$;
- СЛАУ: $V_{n+1} = AV_{n+1} + f_2$;
- Случайные блуждания в R;
- Схема «снизу вверх»;
- Стохастическая устойчивость.

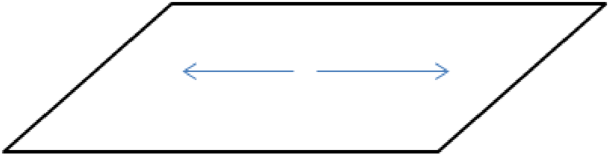


Схема без запоминания

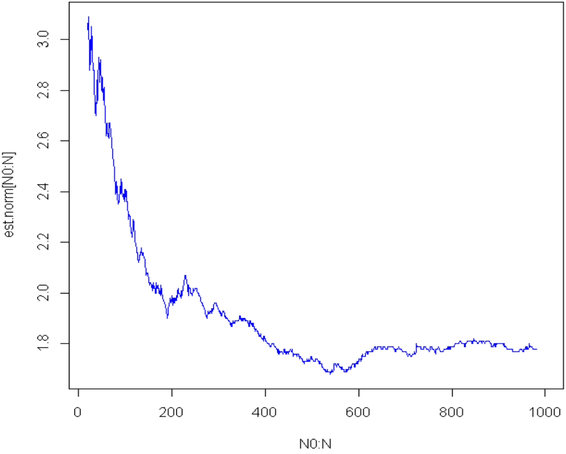


Рис.: Зависимость точности решения от количества смоделированных

Схема с запоминанием

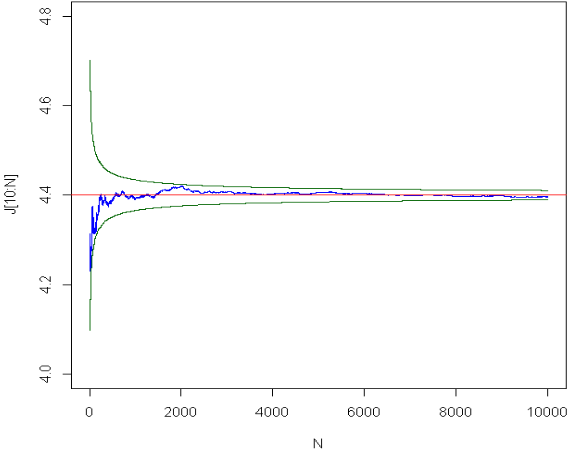


Рис.: Зависимость оценки решения от количества смоделированных

Схема с запоминанием

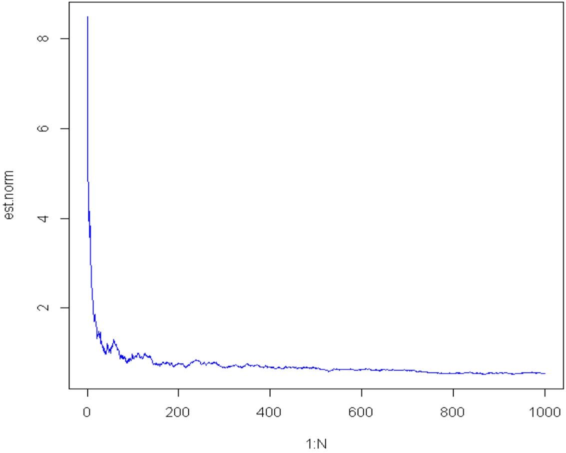


Рис.: Зависимость точности решения от количества смоделированных

Параллелизм

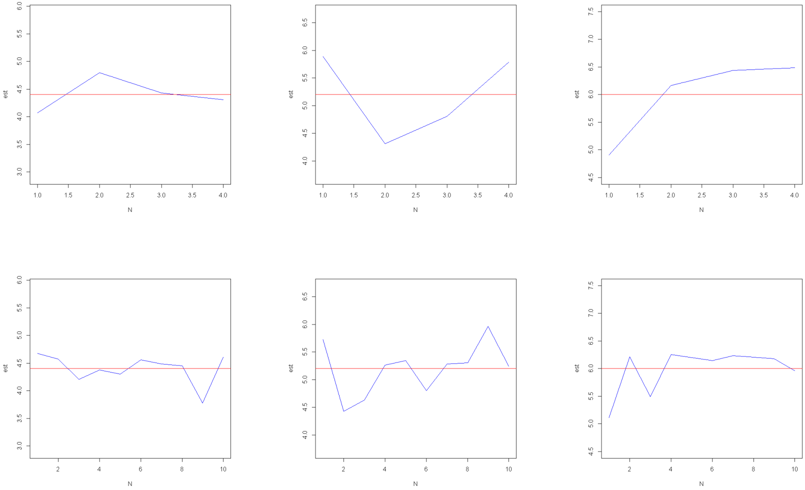


Рис.: Оценка решения при $N = 4$ и $N = 10$, и слоях $t = t_2$, $t = t_4$, $t = t_6$.

Полученные результаты

- Составлены и реализованы два алгоритма:
  - Схема без запоминания в зависимости от начальных данных стохастически неустойчива;
  - Схема с запоминанием является устойчивой в стохастическом смысле.

- Найдено приблизительное число реплик, необходимое для стохастической устойчивости.

Спасибо за внимание!