Изучение методов и решения задач тропической алгебры

А.А. Воеводская, 422 гр.

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: Н. К. Кривулин
Рецензент: И. В. Романовский

СтатМод

Идемпотентная алгебра

- Идемпотентная алгебра занимается изучением полуколец с идемпотентным сложением.
- Изучению идемпотентной математики посвящены работы Н.Н. Воробьева, И.В. Романовского, В.П. Маслова, П. Клемперера, а также других российских и зарубежных учёных.
- Алгоритмы с использованием тропической математики применяются в национальном банке Великобритании.

Экономическая модель

Рассмотрим динамическую систему, которая может находиться в одном из n состояний.

- Стратегия — правило, которое определяет выбор следующей вершины на каждом шаге.
- c_{ij} — прибыль, которую приносит переход из вершины i в вершину j.
- u_i — дисконтированная прибыль для оптимальной траектории, которая начинается в вершине i.
- β — коэффициент дисконтирования.

Для поиска оптимальной стратегии нужно решить уравнение Беллмана:

$$u_i = \max_{1 \le j \le n} (c_{ij} + \beta u_j), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Постановка задачи

- Рассмотреть алгебраическую структуру идемпотентного полуполя пар с некоммутативным умножением.
- Изучить уравнение Беллмана при помощи идемпотентного полуполя пар.
- Исследовать другие матричные уравнения в данном полуполе.

Полуполе пар с некоммутативным умножением

- Множество-носитель – множество пар $\mathbb{X} = \{(u, \xi) | u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \xi \in \mathbb{R}_+\}$, где $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$.
- На множестве заданы операции сложения и умножения: для любых $x = (u, \xi) \in \mathbb{X}$ и $y = (v, \eta) \in \mathbb{X}$ имеем

$$x \oplus y = (\max\{u, v\}, \max\{\xi, \eta\}),$$
$$x \otimes y = (u + \xi \times v, \xi \times \eta).$$

Свойства операций

Свойства операции сложения:

- Ассоциативность: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
- Коммутативность: $x \oplus y = y \oplus x$.
- Идемпотентность: $x \oplus x = x$.
- Существование нейтрального элемента: $\mathbb{0} = (-\infty, 0)$.

Свойства операции умножения:

- Ассоциативность: $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.
- Существование нейтрального элемента: $\mathbb{1} = (0, 1)$.
- Отсутствие коммутативности: $x \otimes y \neq y \otimes x$.
- Существование обратного элемента: для любого ненулевого $x = (u, \xi)$ определен
$$x^{-1} = (-\xi^{-1} \times u, \xi^{-1}).$$
- Дистрибутивность:
$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z,$$
$$(x \oplus y) \otimes z \neq x \otimes z \oplus y \otimes z.$$

Дополнительные свойства полуполя пар

- Операция смешения: для $x = (u, \xi)$ и $y = (v, \eta)$ имеем

$$x \backslash y = (u, \eta).$$

- Идемпотентное вычитание левых частей: для любых $x = (u, \xi)$ и $y = (v, \eta)$ выполняется

$$x \ominus_l y = (\min(u, v), 1).$$

- Частичный порядок: $x \leq y \Leftrightarrow x \oplus y = y$.
- Биномиальное тождество: для любых $x,\ y \in \mathbb{X}$

$$(x \oplus y)^n \leq x^n \oplus y^n \oplus (x \backslash y)^n \oplus (y \backslash x)^n,$$

причём равенство достигается, когда $x \ominus_l y \geq \mathbb{1}$.

Скалярные уравнения

- Если $k \neq \mathbb{0}$, решением уравнения $kx = m$ будет $x = k^{-1}m$. Если $k = \mathbb{0}$ и $m = \mathbb{0}$, то x может быть любым. В остальных случаях решений не существует.
- Если $k \neq \mathbb{0}$, решением уравнения $xk = m$ будет $x = mk^{-1}$. Если $k = \mathbb{0}$ и $m = \mathbb{0}$, то x может быть любым. В остальных случаях решений не существует.
- У уравнения $kx = x$ решение будет любым, если $k = \mathbb{1}$. В остальных случаях оно будет тривиальным.
- У уравнения $xk = x$ решение будет любым, если $k = \mathbb{1}$. В остальных случаях оно будет тривиальным.

Матрицы в полуполе

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица в полуполе, где $a_{ij} = (c_{ij}, \beta ij) \in \mathbb{X}$.
- $\boldsymbol{A}_l$ — матрица, состоящая левых частей элементов матрицы $\boldsymbol{A}$.
- Для любых матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, и $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ и числа x определим сложение, перемножение и умножение на число при помощи формул:

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \ \{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\}_{ij} = \bigoplus_k b_{ik} c_{kj}, \ \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = x a_{ij},$$

где $\{\boldsymbol{A}\}_{ij}$ — элемент матрицы $\boldsymbol{A}$, стоящий на i-ой строке и j-ом столбце.

Уравнение Беллмана

- Дано уравнение $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, где
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} (c_{11}, \beta_{11}) & (c_{12}, \beta_{12}) \\ (c_{21}, \beta_{21}) & (c_{22}, \beta_{22}) \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (u_1, \xi_1) \\ (u_2, \xi_2) \end{pmatrix}.$$
- Для случая $n = 1$ было решено скалярное уравнение.
- Был рассмотрен случай при $n = 2$ с равными β_{ij}.
- Найдена зависимость значений ξ_i от значения β.
- Поиск u_i привел к рассмотрению 9 случаев.
- Были сделаны выводы о группировке решений.

Уравнение Беллмана. Численный пример

Проиллюстрируем один из таких случаев.

- Пример.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} (-1,2) & (3,2) \\ (7,2) & (1,2) \end{pmatrix}.$$

Так как $\beta > 1$, то $\xi = 0$.
Заметим, что выполняются условия одного из полученных подслучаев:
$3 + 2 \times 7 > -1 + 2 \times (-1)$, $7 + 2 \times 3 > 1 + 2 \times 1$, тогда
$u_1 = (7 \times 2 + 3)/(1 - 2^2) = -17/3$,
$u_2 = (3 \times 2 + 7)/(1 - 2^2) = -13/3$.
Соответственно решением этого примера будет:

$$x = \begin{pmatrix} (-17/3, 0) \\ (-13/3, 0) \end{pmatrix}.$$

$Ax = b$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} (c_{11}, \beta_{11}) & (c_{12}, \beta_{12}) \\ (c_{21}, \beta_{21}) & (c_{22}, \beta_{22}) \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (u_1, \xi_1) \\ (u_2, \xi_2) \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} (d_1, \delta_1) \\ (d_2, \delta_2) \end{pmatrix}.$$

- Решено в явном виде для $n = 2$.
- Решение привело к рассмотрению 9 случаев.
- Выведено, что $u_i \leq \{a_{1i}^{-1} b_1 \ominus_l \ldots \ominus_l a_{ni}^{-1} b_n\}_l$, где $i = 1 \ldots n$, u_i — элемент $\boldsymbol{x}_l$, a_{ij} — элемент матрицы $\boldsymbol{A}$, b_i — элемент вектора $\boldsymbol{b}$.
- Доказано, что ξ_i находятся при помощи уравнений в полукольце $R_{\max,\times}$.

$Ax = b$. Численный пример

Проиллюстрируем уравнение примером.
Пусть заданы данные матрица и вектор:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} (1,2) & (2,3) \\ (3,4) & (5,2) \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} (7,5) \\ (3,6) \end{pmatrix}.$$

При заданных условиях будет выполняться один из полученных подслучаев: $3 > 0$, $5/3 > -1$, а значит вектор левых частей будет равняться $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Результаты

- Рассмотрено и изучено идемпотентное полуполе пар с некоммутативным умножением.
- Рассмотрены и доказаны свойства введенных операций.
- Изучено биномиальное тождество.
- Исследованы скалярные уравнения и найдены их решения.
- Рассмотрены матрицы, изучено уравнение Беллмана $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$ в двумерном случае, построен числовой пример.
- Решено уравнение $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ в двумерном случае, сделаны выводы о решении в общем случае, построен числовой пример.