Оптимальные планы для дискриминации двух тригонометрических моделей

Якупова Светлана Валерьевна, гр. 422

Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Шпилев П.В.
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Мелас В.Б.

Санкт-Петербург
2015г.

Цель работы и задачи

Цель работы: нахождение плана для дискриминации двух тригонометрических моделей.

Задачи:

1. исследовать оптимальные планы для моделей отличающихся двумя или тремя старшими членами;
2. исследовать зависимость числа точек плана от значений параметров.

Описание

- T-**оптимальный план** :

$$\underset{\xi}{\text{argmax}} \int_{\mathbf{X}} (\eta_2(x, \theta_2) - \eta_1(x, \theta_2^*))^2 \xi dx,$$

  где

$$\theta_2^* = \underset{\theta_2}{\text{argmin}} \int_{\mathbf{X}} (\eta_2(x, \theta_2) - \eta_1(x, \theta_1))^2 \xi dx,$$

где

- $\eta_1(x, \theta_1)$, $\eta_2(x, \theta_2)$ — конкурирующие регрессионные функции, отличающиеся порядком;
- $\mathbf{X}$ — множество планирования;
- θ_1, θ_2 — параметры, θ_2^* — оценка параметра;
-

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix}, \sum_1^n w_i = 1, \qquad i = 1..n, \qquad w_i \geq 0.$$

Описание

Модель1 $\eta_1(x, \theta_1)$:

$$\bar{q_0} + \sum_{i=1}^{k_1} (\bar{q_{2i}} \cos(ix)) + \sum_{i=1}^{k_2} (\bar{q_{2i}} \cos(ix));$$

Модель2 $\eta_2(x, \theta_2)$:

$$\tilde{q_0} + \sum_{i=1}^{k_1} \tilde{q}_{2i-1} \sin(ix) + \sum_{i=1}^{k_2} \tilde{q}_{2i} \cos(ix) + \sum_{i=k_1+1}^{n} b_{2(i-k_1)-1} \sin(ix) + \sum_{i=k_2+1}^{n} b_{2(i-k_2)} \cos(ix);$$

Решение задачи при $k_1 = k_2 = n - 1$ и произвольном n

Теорема

Для моделей 1 и 2 в случае $k_1 = k_2 = n - 1$ T - оптимальный план имеет вид:

$$\xi^*_{n-1,n-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\arctan(\frac{1}{b}) & \frac{1}{n}\arctan(\frac{1}{b}) + \frac{\pi}{n} & \dots & \frac{1}{n}\arctan(\frac{1}{b}) + \frac{(2n-1)\pi}{n} \\ \frac{1}{2n} & \frac{1}{2n} & \dots & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}$$

Для фиксированных $n = 6$, $b = 2$:

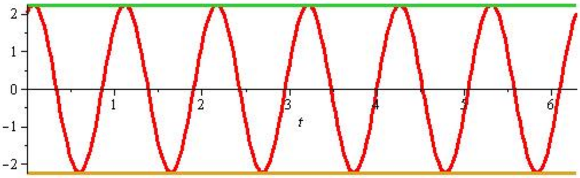


Рис.: График экстремального полинома для тригонометрической модели $x_i \in [0, 2\pi]$.

Случай $k_1 = n - 1$, $k_2 = n - 2$

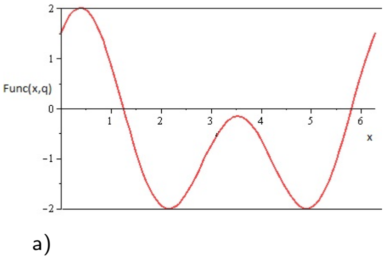
- **Модель1** :

$$\eta_1(x, \theta_1) = \bar{q_0} + \bar{q_1}\sin(x),$$

- **Модель2** :

$$\eta_2(x, \theta_2) = \tilde{q_0} + \tilde{q_1}\sin(x) + \cos(x) + b_1\sin(2x) + b_2\cos(2x)$$

- **а)** $b_1 = b_2 = 1$, **b)** $b_1 = 7$, $b_2 = 0.1$:



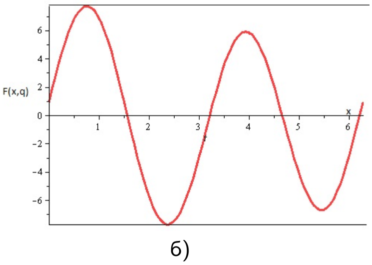
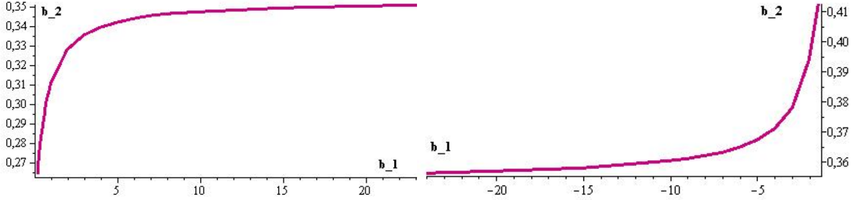


Рис.: Графики экстремальных полиномов а) трехточечный, б) двухточечный

Зависимость числа точек плана от b_1, b_2



на отрезке $[0, 24]$ на отрезке $[-24, 0]$

Рис.: График множества критических значений (b_1, b_2).

Случай $k_1 = n - 1$, $k_2 = n - 2$

Модель1 $\eta_1(x, \theta_1)$:

$$\bar{q}_0 + \bar{q}_1 \sin(x) + \bar{q}_3 \sin(2x) + \bar{q}_4 \cos(x);$$

Модель2 $\eta_2(x, \theta_2)$:

$$\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 \sin(x) + \tilde{q}_2 \cos(x) + \tilde{q}_3 \sin(2x) + b_1 \sin(3x) + b_2 \cos(3x).$$

- план первого типа
- план второго типа

- а) $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$ — пятиточечный план первого типа;
- б) $b_1 = 2$, $b_2 = 0.1$ — пятиточечный план второго типа;
- в) $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$ — четырехточечный план второго типа;

Графики экстремальных многочленов

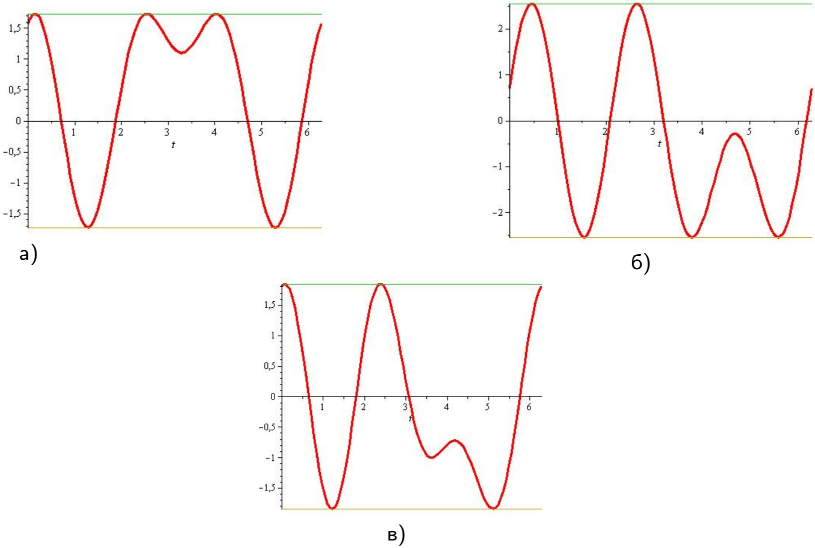


Рис.: а) первый тип,$b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, б) второй тип, $b_1 = 2$, $b_2 = 0.1$, в) второй тип,$b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$.

Зависимость числа точек плана от b_1, b_2

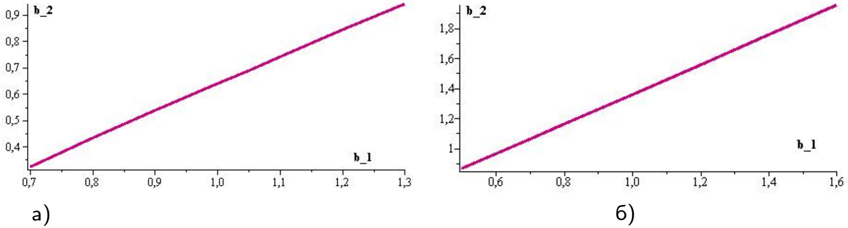


Рис.: Критическое значение параметра для планов а)первого типа, б)второго типа.

Результаты

1. Получен в явном виде оптимальный план для модели с двумя неизвестными параметрами.
2. Получен T-оптимальный план для модели с тремя неизвестными параметрами порядка $n = 2$, $n = 3$.
3. Исследована зависимость числа опорных точек плана от значений b_1, b_2.