Решение двухкритериальных задач тропической оптимизации и их приложения

Цобенко Маргарита Александровна, гр. 15Б-04мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д. ф.-м. н., профессор Кривулин Н. К.
Рецензент: к. ф.-м. н., доцент Пономарёва А. Ю.

Санкт-Петербург
2019г.

Тропическая оптимизация и задачи принятия решений

- Тропическая (идемпотентная) математика — область прикладной математики, связанная с изучением полуполей с идемпотентным сложением.
- Идемпотентная математика находит все более широкое применение при решении реальных проблем в различных областях, включая принятие решений.
- Чтобы решить эти проблемы в рамках тропической математики, они формулируются как задачи оптимизации функций, определенных на векторах над идемпотентными полуполями.
- Одним из приложений задач тропической оптимизации являются многокритериальные задачи принятия решений.

Однокритериальная задача принятия решений

- Пусть имеются n допустимых альтернатив.
- Требуется каждой альтернативе поставить в соответствие приоритет (число) — получить рейтинг альтернатив.
- Проводится процедура парных сравнений альтернатив:
  - Результат — матрица парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, где $a_{ij} > 0$.
  - a_{ij} показывает во сколько раз альтернатива i предпочтительнее альтернативы j.
  - Конечный результат анализа — вектор рейтингов альтернатив $\boldsymbol{x} = (x_i)$.

Матрицы парных сравнений

- Матрица парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ называется согласованной, если выполняются свойства обратной симметричности и транзитивности
  1. Для любых i, j: $a_{ij} = a_{ji}^{-1}$ — обратная симметричность,
  2. Для любых i, j, k: $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$ — транзитивность.
- Если матрица $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ согласованная, то найдется вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$, где $x_i > 0$, который определяет ее элементы: $x_{ij} = x_i/x_j$.
- Вектор $\boldsymbol{x}$ является вектором рейтингов альтернатив.

Задача аппроксимации

- В практических задачах матрицы парных сравнений обычно являются обратно симметрическими, но не транзитивными.
- Возникает задача аппроксимации обратно симметрической матрицы $\boldsymbol{A}$ согласованной матрицей $\boldsymbol{X}$:

$$\min_{\boldsymbol{X}} \mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}),$$

  где d — функция, измеряющая величину ошибки аппроксимации.
- В качестве $\mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X})$ рассматривается $\log$-чебышевское расстояние, которое в силу монотонности логарифма записывается в виде

$$\mathrm{d}_{\log}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = \max_{i,j} |\log a_{ij} - \log x_{ij}| = \log \max_{i,j} \max\{x_{ij}^{-1} a_{ij}, x_{ij} a_{ij}^{-1}\}.$$

- Учитывая, что логарифм — монотонная функция, $a_{ij} = 1/a_{ji}$ и $x_{ij} = x_i/x_j$, задача $\log$-чебышевской аппроксимации сводится к задаче

$$\min_{\boldsymbol{x}} \max_{i,j} x_i^{-1} a_{ij} x_j.$$

Постановка двухкритериальной задачи

- Пусть имеются две положительные обратно симметрические матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ относительно двух критериев.
- Требуется найти вектор рейтингов альтернатив на основе двух матриц парных сравнений.
- Задача сводится к задаче одновременной аппроксимации $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ согласованной матрицей $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ с элементами $x_{ij} = x_i/x_j$, где x_i — элементы вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$.
- С использованием чебышевской аппроксимации в логарифмической шкале приходим к задаче:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \{\max_{i,j} x_i^{-1} a_{ij} x_j, \max_{k,l} x_k^{-1} b_{kl} x_l\}.$$

- Если критерии неравнозначны, и заданы неотрицательные веса α и β для критериев, то имеем задачу

$$\min_{\boldsymbol{x}} \{\alpha \max_{i,j} x_i^{-1} a_{ij} x_j, \beta \max_{k,l} x_k^{-1} b_{kl} x_l\}.$$

1. Сформулировать задачу аппроксимации несогласованных матриц согласованной матрицей в терминах тропической математики.
2. Построить полное решение этой задачи в явном виде.
3. Применить полученный результат к решению задачи оценки рейтингов альтернатив.

Идемпотентное полуполе — алгебраическая система $\langle \mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1} \rangle$.

- Операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ ассоциативны и коммутативны, умножение дистрибутивно относительно сложения.
- Ноль $\mathbb{0}$ и единица $\mathbb{1}$ — нейтральные элементы.
- Для каждого $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1} такой, что $x^{-1} \otimes x = \mathbb{1}$.
- Сложение является идемпотентным, то есть $x \oplus x = x$ для всех $x \in \mathbb{X}$.

Примеры идемпотентных полуполей

- $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0 \rangle$
- $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_{+} \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1 \rangle$

Далее для упрощения записи знак умножения $\otimes$ будем опускать.

- $\mathbb{X}^{m\times n}$ — множество матриц над $\mathbb{X}$ размера $m \times n$.
- Сложение и умножение двух матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ и умножение матрицы на скаляр $x \in \mathbb{X}$ выполняются по стандартным правилам с заменой арифметических операций на операции $\oplus$ и $\otimes$

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}\}_{ij} = \bigoplus_k a_{ik} b_{kj}, \quad \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = x a_{ij}.$$

- Для любой ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$ определена мультипликативно сопряженная матрица $\boldsymbol{A}^{-} = (a_{ij}^{-}) \in \mathbb{X}^{n\times m}$, где

$$a_{ij}^{-} = \begin{cases} a_{ji}^{-1}, & \text{если } a_{ji} \neq \mathbb{0}, \\ \mathbb{0}, & \text{если } a_{ji} = \mathbb{0}. \end{cases}$$

- Обозначим через $\boldsymbol{I}$ квадратную матрицу, у которой все диагональные элементы равны $\mathbb{1}$, а недиагональные — $\mathbb{0}$.

- $\mathbb{X}^n$ — множество векторов-столбцов размера n .
- Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, называется нулевым.
- Вектор называется регулярным, если он не содержит нулевых компонент.
- Для любого ненулевого вектора $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определен мультипликативно сопряженный вектор $\boldsymbol{x}^- = (x_i^-)$ с элементами

$$x_i^- = \begin{cases} x_i^{-1}, & \text{если } x_i \neq \mathbb{0}, \\ \mathbb{0}, & \text{если } x_i = \mathbb{0}. \end{cases}$$

Квадратные матрицы

- Для любой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ следом называется величина
$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$
- Скаляр $\lambda \in \mathbb{X}$ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, если существует ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^{n}$ такой, что
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$
- Максимальное собственное число называется спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ и вычисляется по формуле
$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n} \boldsymbol{A}^{n}.$$
- Сумма всех циклических произведений элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначается символом
$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^{n}.$$
- При условии, что $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$ матрицу Клини определяют как
$$\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Взвешенная задача $\log$-чебышевской аппроксимации обратно симметрических матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ согласованной матрицей $\boldsymbol{X}$ имеет вид

$$\min_{\boldsymbol{x}} \{\alpha \max_{i,j} x_i^{-1} a_{ij} x_j, \beta \max_{k,l} x_k^{-1} b_{kl} x_l\}.$$

При замене арифметических операций на операции идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ задача принимает вид

Задача тропической оптимизации

Двухкритериальная задача оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x}} \{\alpha \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x},\ \beta \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}\},$$

где $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_{+}^{n\times n}$ — заданные положительные обратно симметрические матрицы, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ — неизвестный регулярный вектор-столбец.

Нахождение Парето-оптимального решения

Рассмотрим задачу двухкритериальной оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S} \{f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})\},$$

где $f_i : R^n \to R$ — целевые функции для $i = 1, 2$, $S \subset R^n$ — допустимое множество решений $\boldsymbol{x}$.

- Вектор решения $\boldsymbol{x}' \in S$ называется оптимальным по Парето, если не существует $\boldsymbol{x} \in S$ такого, что $f_i(\boldsymbol{x}) \leq f_i(\boldsymbol{x}')$ для всех i и $f_i(\boldsymbol{x}) < f_i(\boldsymbol{x}')$ для хотя бы одного i.
- Решением задачи двухкритериальной оптимизации является множество всех Парето-оптимальных точек (Парето-множество).
- Парето-фронт — образ Парето-множества в пространстве целевых функций.

Двухкритериальная задача оптимизации имеет вид

$$\min_{\boldsymbol{x}}\{\alpha\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \beta\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\}.$$

Обозначим оптимальное по Парето значение целевой функции $\alpha\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ через θ, функции $\beta\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ через σ.
Обозначим спектральные радиусы матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ через

$$\mu = \bigoplus_{m=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^{m}), \qquad \nu = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{B}^{k})$$

и положим

$$\delta_{km} = \bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=m} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}).$$

Теорема

1. Если выполняется условие $\nu > \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{m=1}^{n-k} \mu^{-k/m} \delta_{km}^{k/m}$, то Парето-фронт для задачи представляет собой точку

$$\theta = \alpha\mu, \quad \sigma = \beta\nu,$$

при этом все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\alpha^{-1}\mu^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \beta^{-1}\nu^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0};$$

2. Если выполняется $\nu \leq \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{m=1}^{n-k} \mu^{-k/m} \delta_{km}^{k/m}$, то Парето-фронт задачи состоит из множества точек (θ, σ), которое определяется следующими соотношениями:

$$\theta = \alpha \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{m=1}^{n-k} \beta^{m/k} \sigma^{-m/k} \delta_{km}, \quad \beta\nu \leq \sigma \leq \beta \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{m=1}^{n-k} \mu^{-k/m} \delta_{km}^{k/m},$$

а все регулярные Парето-оптимальные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}.$$

Решение численного примера

Пусть имеется 3 альтернативы $(n = 3)$. Заданные матрицы и неизвестный вектор представлены в виде

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим степени матрицы $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 4/3 & 2 & 4 \\ 2/3 & 4/3 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим степени матрицы $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спектральные радиусы матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равны

$$\mu = \bigoplus_{m=1}^{3} \operatorname{tr}^{1/m}(\boldsymbol{A}^m) = (4/3)^{1/3}, \quad \nu = \bigoplus_{m=1}^{3} \operatorname{tr}^{1/m}(\boldsymbol{B}^m) = 1.$$

Для того чтобы вычислить выражение $\bigoplus_{k=1}^{2}\bigoplus_{m=1}^{3-k}\beta^{m/k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}$, рассмотрим матрицы

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 2/3 & 2 & 2\\ 1/3 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{AB}^2=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 2/3 & 2 & 2\\ 1/3 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4/3 & 4 & 4\\ 2/3 & 2 & 2\\ 1/3 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Исходя из этого, получаем

$$\delta_{11}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=2,\quad \delta_{12}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}^2)=2,\quad \delta_{21}=\mathrm{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B})=\sqrt{2}.$$

Подставим в выражение выше и преобразуем

$$\bigoplus_{k=1}^{2}\bigoplus_{m=1}^{3-k}\beta^{m/k}\sigma^{-m/k}\delta_{km}=2\beta\sigma^{-1}\oplus 2\beta^2\sigma^{-2}\oplus\sqrt{2}\beta^{1/2}\sigma^{-1/2}.$$

Построим Парето-фронт задачи, состоящий из множества точек (θ, σ), определяющийся соотношениями

$$\theta = 2\alpha\beta\sigma^{-1} \oplus 2\alpha\beta^2\sigma^{-2} \oplus \sqrt{2}\alpha\beta^{1/2}\sigma^{-1/2},$$
$$\beta \leq \sigma \leq 2^{-1/3}3^{2/3}\beta.$$

По теореме все регулярные Парето-оптимальные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \sigma^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}.$$

Рассмотрим задачу при $\alpha = 3/4, \beta = 1/4$.
Тогда решение представляется в виде

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} v, \quad v > 0.$$

Результаты

- Исследованы задачи многокритериальной оптимизации, которые возникают при оценке рейтингов альтернатив на основе их парных сравнений в соответствии с двумя критериями.
- Изучены необходимые для решения задач оптимизации основные понятия и предварительные результаты идемпотентной математики.
- Получено полное решение двухкритериальной задачи принятия решений для случая произвольного числа альтернатив в явном виде.
- Разработано приложение полученных результатов к решению задачи оценки рейтингов альтернатив.
- Представлен численный пример решения задачи для матриц третьего порядка (случай трех альтернатив).
- Результаты работы были получены в рамках исследования, поддержанного фондом РФФИ.
- Дальнейшие исследования могут быть направлены на решение задач с тремя и более критериями.