Построение D-оптимальных планов для модели Кобба-Дугласа

Арзамасцев Святослав, группа 15.Б04-ММ

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Шпилев П.В.
Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Невзоров В.Б.

Санкт-Петербург
2019г.

Введение

Пусть результаты эксперимента описываются регрессионной моделью:

$$y_j = \eta(t_j, \theta) + \epsilon_j,\ j = 1, ...N,$$

- $\eta(t_j, \theta)$ — вещественная функция известная с точностью до параметров $\theta = (\theta_0, ..., \theta_m)^T$, описывающая зависимость между условиями эксперимента и результатами,
- $t_1, ..., t_N$ — условия проведения эксперимента — элементы множества планирования χ,
- χ — фиксированное множество, наделенное структурой компактного топологического пространства,
- $\epsilon_1, ..., \epsilon_N$ — случайные величины, характеризующие ошибки наблюдений.

Цель эксперимента

Целью эксперимента является оценивание параметров $\theta_0, .., \theta_m$ или функций от этих параметров. На точность оценок влияет метод оценивания и выбор точек в которых проводятся измерения $(t_1, .., t_N)$.

- Условия проведения измерений можно записать в виде таблицы, называемой планом эксперимента:

$$\xi = \begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}, \; t_i \neq t_j \textit{ при } i \neq j, \; \omega_i \geq 0, \; \sum \omega_i = 1,$$

- n – число попарно различных точек в плане, а $m+1$ – количество параметров модели,
- существует два типа оптимальных планов: насыщенный $(m+1=n)$ и избыточный $(m+1<n)$.

Двумерная модель Кобба-Дугласа

- В работе изучается проблема влияния гомотетии и сдвига области планирования на число оптимальных точек плана при фиксированных значениях параметров регрессионной модели.

- Рассматривается производственная функция Кобба-Дугласа — модель, используемая в микроэкономике и показывающая зависимость объёма производства от создающих его факторов — труда и капитала.
  Функция имеет вид:

$$\eta(x,\theta) = \theta_0 \exp(-\theta_1 x_1 - \theta_2 x_2),\ 0 \le x_{1,2} \le b_{1,2},\ \text{где } b_{1,2} \in \mathbb{R}$$

- Задачей исследования являлось построить D-оптимальные планы и определить как они изменяются в зависимости от значений параметров и выбора области планирования.

Основные понятия

- Информационная матрица:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) f^T(x_i)$$

- Критерий D-оптимальности имеет вид

$$\log\det M(\xi) \to \sup_{\xi \in \Xi}$$

или

$$\log\det M(\xi)^{-1} \to \inf_{\xi \in \Xi},$$

где Ξ - множество непрерывных планов, сосредоточенных в точках с ненулевыми весовыми коэффициентами

Теорема эквивалентности (Кифер-Вольфовиц) [Ермаков, 1987]

Если множество информационных матриц M компактно, то следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\xi^* = \arg\max_{\xi \in \Xi} \det M(\xi)$, *т.е. план* ξ^* D*-оптимален;*

(b) $\max_{x \in \chi} d(x, \xi^*) = m + 1$,

где $d(x, \xi^*) = f^T(x) M(\xi^*)^{-1} f(x)$ *(экстремальная функция).*

Замечание

Информационные матрицы всех планов, удовлетворяющих одному из двух указанных утверждений, совпадают между собой. В точках x_i *этих планов* $d(x_i, \xi^*) = m + 1$.

Теорема 2

Пусть ξ^* – локально D-оптимальный план, $\lambda_1 = b_1\theta_1$ и $\lambda_2 = b_2\theta_2$ и $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$ – множество 3-точечных планов, тогда:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (0;0) & (\frac{1}{\lambda_1};0) & (0;\frac{1}{\lambda_2}) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ при } 1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1, \qquad (1)$$

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (0;0) & (\frac{1}{\lambda_1};0) & (0;1) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ при } \lambda_2 \leq 1 \leq \lambda_1, \qquad (2)$$

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (0;0) & (1;0) & (0;1) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ при } \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq 1, \qquad (3)$$

Для случая (1) множество Λ определено следующим образом:

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 1 \leq \lambda_1,\ 1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1\}.$$

Теорема (продолжение)

Теорема 2 (продолжение)

Для случая (2) *множество* Λ *определено следующим образом:*

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 1 \le \lambda_1,\ g(1) \le \lambda_2 \le 1\},$$

Для случая (3) *множество* Λ *определено следующим образом:*

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1) \le \lambda_1 \le 1,\ g(\lambda_1) \le \lambda_2 \le \lambda_1\},$$

где $g(\lambda_1)$ *имеет следующий вид:*

$$g(\lambda_1) = \begin{cases} \frac{\log \frac{1+e^{2\lambda_1}}{-1+e^{2\lambda_1}}}{2}, & \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} \le \lambda_1 \le \frac{1}{2}W(-2e^{-2})+1, \\ d, & \frac{1}{2}\,\mathrm{W}(-2e^{-2})+1 \le \lambda_1 \le 1, \end{cases}$$

$$d = \frac{1}{2}\log\left(-\frac{\mathrm{W}(-2e^{-2})(\mathrm{W}(-2e^{-2})+2)(e^{2\lambda_1}+1)}{4\lambda_1^2}\right).$$

Идея доказательства

Оптимальность планов (1) – (3) проверяется непосредственно по теореме эквивалентности. В соответствии с ней, план ξ является оптимальным, если экстремальная функция плана удовлетворяет определенным условиям.

- В каждом случае вычисляется экстремальная функция.
- Вводится дополнительное уравнение о равенстве производной экстремальной функции нулю.
- Затем выражается зависимость точек оптимального плана от значений параметров λ_i, где $i = 1, 2$.

График экстремальной функции

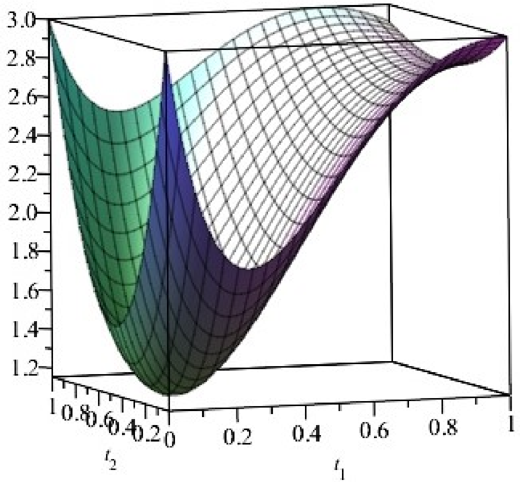

Рис.: График экстремальной функции для случая (1) с 4-ой вершиной в точке $(t, 1)$, где $t = \frac{W(-2e^{-2})+2}{2}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Следствие теоремы

Следствие

ξ^* – локально D-оптимальный план, если для $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, где $\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \#\,\mathrm{supp}(\xi^*) = 3\}$ план ξ^* имеет вид:

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (a;a) & (a+\frac{1}{\lambda_1};a) & (a;a+\frac{1}{\lambda_2}) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ при } 1 \le \lambda_2 \le \lambda_1, \quad (4)$$

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (a;a) & (a+\frac{1}{\lambda_1};a) & (a;a+1) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ при } \lambda_2 \le 1 \le \lambda_1, \quad (5)$$

$$\xi^* = \begin{pmatrix} (a;a) & (a+1;a) & (a;a+1) \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ при } \lambda_2 \le \lambda_1 \le 1. \quad (6)$$

Для случая (4) множество Λ определено следующим образом:

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 1 \le \lambda_1,\ 1 \le \lambda_2 \le \lambda_1\}.$$

Следствие теоремы (продолжение)

Следствие (продолжение)

Для случая (5) *множество* Λ *определено следующим образом:*

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 1 \le \lambda_1,\ g(1) \le \lambda_2 \le 1\},$$

Для случая (6) *множество* Λ *определено следующим образом:*

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1) \le \lambda_1 \le 1,\ g(\lambda_1) \le \lambda_2 \le \lambda_1\},$$

где $g(\lambda_1)$ *имеет следующий вид:*

$$g(\lambda_1) = \begin{cases} \frac{\log \frac{1+e^{2\lambda_1}}{-1+e^{2\lambda_1}}}{2}, & \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} \le \lambda_1 \le \frac{1}{2}W(-2e^{-2})+1, \\ d, & \frac{1}{2}\,\mathrm{W}(-2e^{-2})+1 \le \lambda_1 \le 1, \end{cases}$$

$$d = \frac{1}{2}\log\Big(-\frac{\mathrm{W}(-2e^{-2})(\mathrm{W}(-2e^{-2})+2)(e^{2\lambda_1}+1)}{4\lambda_1^2}\Big).$$

График экстремальной функции

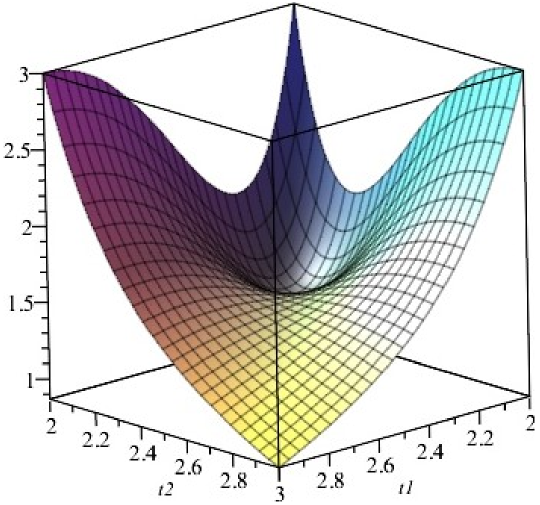

Рис.: График экстремальной функции для случая (6) при $a = 2$

График экстремальной функции

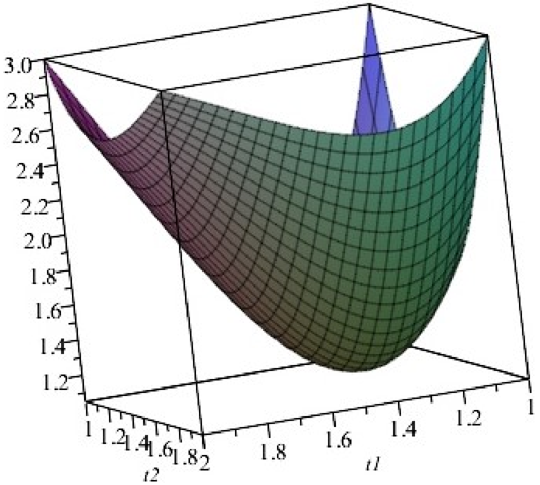

Рис.: График экстремальной функции для случая (4) при $a = 1,\ \lambda_1 = 0.5$ и $\lambda_2 = \frac{1}{2}\log(\frac{1+e^{2\lambda_1}}{-1+e^{2\lambda_1}}) \approx 0.386$

Заключение и выводы

- В рамках работы были исследованы и построены в явной форме насыщенные локально D-оптимальные планы для производственной функции Кобба-Дугласа,
- Представлено аналитическое решение проблемы построения невырожденных оптимальных планов с минимальным количеством точек,
- Найдена зависимость числа и вида точек носителя D-оптимального плана от преобразований гомотетии и сдвига области планирования.