Методы тропической математики в многомерных задачах оптимизации

Мартынкина Екатерина Сергеевна, гр. 15.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Вычислительная стохастика и статистические модели

Научный руководитель: д.ф-м.н., проф. Кривулин Н.К.
Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Пономарева А. Ю.

Санкт-Петербург
2019г.

Введение

- Тропическая (идемпотентная) математика охватывает область, связанную с изучением свойств полуколец и полуполей с идемпотентным сложением и их приложениями.
- Важным направлением развития этой области является разработка методов и алгоритмов решения задач оптимизации, сформулированных в терминах тропической математики.

Задача:

1. построить полное решение задачи тропической оптимизации;
2. применить методы тропической оптимизации к аппроксимации положительных матриц матрицами единичного ранга.

Тропическая оптимизация

Задачи тропической оптимизации состоят в минимизации или максимизации функций, заданных на векторах над идемпотентным полуполем и находят применение в таких областях, как

1. задачи сетевого планирования,
2. минимаксные задачи размещения объектов в пространстве,
3. многокритериальные задачи принятия решений.

Важное достоинство тропической оптимизации: возможность получить полное решение в явной аналитической форме.

Одноранговая аппроксимация

В работе методы тропической оптимизации применяются к аппроксимации положительных матриц матрицами единичного ранга.

Задача одноранговой аппроксимации положительных матриц возникает, например,

1. в области машинного обучения,
2. в области технического зрения,
3. в экономике.

Одноранговая аппроксимация

- существенно упрощает структуру матрицы,
- сокращает объем памяти для ее хранения: матрица порядка n определяется n^2 элементами, аппроксимирующая матрица — $2n$.

Идемпотентное полуполе

Идемпотентное полуполе — алгебраическая система $(\mathbb{X}, \oplus, \otimes, \mathbb{0}, \mathbb{1})$

- $\oplus$ — операция сложения с нейтральным элементом $\mathbb{0}$ (ноль).
- $\otimes$ — операция умножения с нейтральным элементом $\mathbb{1}$ (единица).
- Операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ ассоциативны и коммутативны.
- Операция умножения дистрибутивна относительно сложения.
- Сложение идемпотентно: для любого x выполняется $x \oplus x = x$.
- У каждого элемента $x \neq \mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$.

Далее знак умножения $\otimes$ опускается.

Пример

max-алгебра: $\mathbb{R}_{\max,\times} = \langle \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \max, \times, 0, 1 \rangle$, где $\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел.

Матрицы и векторы

- $\mathbb{X}^{m\times n}$ — множество матриц размера $m \times n$ над полуполем $\mathbb{X}$.
- Для любых матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{X}^{m\times n}$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times l}$ операции сложения, умножения матриц, умножение на скаляр $x \in \mathbb{X}$ определяются по формулам:

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{C}\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj}, \quad \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = x a_{ij}.$$

- Мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{m\times n}$ называется преобразование в матрицу $\boldsymbol{A}^{-} \in \mathbb{X}^{n\times m}$, где $a_{ij}^{-} = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq \mathbb{0}$, и $a_{ij} = \mathbb{0}$ иначе.
- Матрица, состоящая из одного столбца (строки), образует вектор-столбец (вектор-строку).
- $\mathbb{X}^{n}$ — множество вектор-столбцов размерности n.
- Нулевой вектор имеет все компоненты равными $\mathbb{0}$.
- Вектор без нулевых компонент называется регулярным.

Предварительные результаты

- Следом матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{n\times n}$ называется величина
$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$
- Любая матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n имеет спектральный радиус (максимальное собственное число)
$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n).$$
- Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n определим матрицу
$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Лемма [Кривулин, 2013]

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ — матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда
$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{x}^{-} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \lambda,$$
причем минимум достигается тогда и только тогда, когда
$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1} \boldsymbol{A})^{*} \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{X}^n.$$

Предположим, что заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ и требуется найти регулярные векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{X}^{n}$, на которых достигается

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}.$$

В работе получена теорема, которая дает полное решение задачи.

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n\times n}$ – матрицы, $\mu > \mathbb{0}$ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. Тогда минимум в задаче тропической оптимизации равен μ, а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \alpha(\mu^{-1/2}\left(\mu^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\right)^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \oplus (\mu^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{w}),$$
$$\boldsymbol{y} = \beta((\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{v} \oplus \mu^{-1/2}\left(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\right)^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}),$$

при любых $\alpha > \mathbb{0}$, $\beta > \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{X}^{n}$.

Одноранговая аппроксимация положительных матриц

Задача аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ матрицей единиченого ранга $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}$ формулируется как задача оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}),$$

где:

- $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ — квадратная $(n \times n)$-матрица с элементами $a_{ij} > 0$,
- $\boldsymbol{x}^{-} = (x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ — положительные n–векторы (вектор-строка и вектор-столбец),
- d — функция, измеряющая величину ошибки аппроксимации.

В работе в качестве функции d берется максимальный разброс разностей $\log a_{ij} - \log(y_i/x_j)$ по всем элементам матрицы $\boldsymbol{A}$ (логарифм берется по основанию больше единицы):

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}) = \max_{1\leq i,j\leq n}(\log a_{ij} - \log(y_i/x_j)) - \min_{1\leq i,j\leq n}(\log a_{ij} - \log(y_i/x_j)).$$

Одноранговая аппроксимация положительных матриц

Рассмотрим задачу аппроксимации положительной квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ матрицей единичного ранга $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}$.

Преобразуем величину максимального разброса

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} (\log a_{ij} - \log(y_i/x_j)) - \min_{1 \leq i,j \leq n} (\log a_{ij} - \log(y_i/x_j)) =$$
$$= \log\left(\max_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_j / y_i \times \max_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}^{-1} y_k / x_l\right).$$

Тогда рассматриваемая задача аппроксимации принимает вид

$$\min_{\substack{x_1,\ldots,x_n \\ y_1,\ldots,y_n}} \max_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_j / y_i \times \max_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}^{-1} y_k / x_l.$$

В терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ задача аппроксимации записывается в виде

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y}.$$

Решение задачи одноранговой аппроксимации

Найдем решение задачи одноранговой аппроксимации матриц путем решения эквивалентной задачи тропической оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{y}.$$

Следствие получено из решения задачи тропической оптимизации при дополнительном предположении, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-}$.

Следствие

Пусть $\boldsymbol{A}$ — положительная матрица, $\mu > \mathbb{0}$ — спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$. Тогда все аппроксимирующие матрицы имеют вид $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}$, где

$$\boldsymbol{x}^{-} = \alpha((\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{v} \oplus \mu^{-1/2}\mu^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{w})^{-},$$
$$\boldsymbol{y} = \beta(\mu^{-1/2}(\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \oplus (\mu^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{*}\boldsymbol{w}),$$

при любых $\alpha > \mathbb{0}$, $\beta > \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{X}^{n}$.

Аппроксимация обратно-симметрических матриц

Рассмотрим задачу аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}$ матрицей единичного ранга $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}$, где

- $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ — обратно симметрическая $(n \times n)$-матрица с элементами $a_{ij} = 1/a_{ji} > 0$,
- $\boldsymbol{x}^{-} = (x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ — положительные n–векторы (вектор-строка и вектор-столбец).

Обратно симметрическая матрица обладает свойством $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-}$.

Тогда в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ задача аппроксимации принимает вид

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

Решение задачи одноранговой аппроксимации

Найдем решение задачи одноранговой аппроксимации матриц путем решения эквивалентной задачи тропической оптимизации

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{y}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

Следствие получено из решения задачи тропической оптимизации при дополнительном предположении, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$.

Следствие

Пусть $\boldsymbol{A}$ — обратно симметрическая матрица со спектральным радиусом $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда все аппроксимирующие матрицы имеют вид $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}$, где

$$\boldsymbol{x}^{-} = \alpha((\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^{2})^{*}\boldsymbol{v} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^{2})^{*}\boldsymbol{w})^{-},$$
$$\boldsymbol{y} = \beta(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^{2})^{*}\boldsymbol{v} \oplus (\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^{2})^{*}\boldsymbol{w}),$$

при любых $\alpha > \mathbb{0}$, $\beta > \mathbb{0}$ и $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{X}^{n}$.

Численный пример

Рассмотрим задачу аппроксимации матрицей единичного ранга $\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^{-}$ обратно-симметрической матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1/6 & 1 & 4 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя арифметику полуполя $\mathbb{R}_{\max,\times}$ вычислим матрицы

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 24 \\ 4/3 & 1 & 4 \\ 1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 24 \\ 4/3 & 8 & 4 \\ 1/3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя следы матриц, получим спектральный радиус $\boldsymbol{A}$ равен

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{tr}^{1/2}(\boldsymbol{A}^2) \oplus \operatorname{tr}^{1/3}(\boldsymbol{A}^3) = 2.$$

Численный пример

Вычислим $(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^* = \boldsymbol{I} \oplus \lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2 \oplus (\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^2$ и $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^*$:

$$(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем векторы $\boldsymbol{x}^-$ и $\boldsymbol{y}$ в виде

$$\boldsymbol{x}^- = \alpha((\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^*\boldsymbol{v} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^*\boldsymbol{w})^-,$$
$$\boldsymbol{y} = \beta(\lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^*\boldsymbol{v} \oplus (\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^*\boldsymbol{w}).$$

Выберем из столбцов матриц $(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^*$ и $\lambda^{-1}\boldsymbol{A}(\lambda^{-2}\boldsymbol{A}^2)^*$ линейно независимые столбцы.

Тогда все аппроксимирующие матрицы имеют вид

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^- = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Заключение

В работе были получены следующие результаты:

- изучены основные понятия и результаты идемпотентной алгебры, необходимые для решения задачи тропической оптимизации;
- построено полное решение задачи тропической оптимизации для произвольных матриц в явном виде в замкнутой форме;
- разработаны приложения полученных результатов к решению задач одноранговой аппроксимации положительных и обратно симметрических матриц;
- результаты выполненной работы представлены на конференции «СПИСОК-2019» и подготовлена статья для публикации в трудах конференции.

Дальнейшие исследования могут включать решения задач аппроксимации с ограничениями, а также разработку новых приложений полученных результатов.