

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

СУШКОВ Ю.А.

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ

*Учебное пособие*

2016

ББК 22.176  
С91

Р е ц е н з е н т :

проф. Кривулин Н.К. (С.-Петербург. гос. ун-т)

**Сушков Ю.А.**

С91 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ. Учеб. пособие.  
– СПб.: С.-Петерб. ун-т. 2016. – 67 с.

В учебном пособии излагаются основы моделирования сложных систем. Дается классификация имитационных моделей, рассматриваются основные математические схемы, используемые в моделях, исследуются их промежутки и недостатки. Анализируются возможности рассматриваемых моделей, и приводится их сравнительная оценка.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов естественных факультетов.

**ББК 22.176**

©Ю.А.Сушков, 2016

©

С.-Петербургский  
университет, 2016

## В В Е Д Е Н И Е

В новых условиях хозяйствования руководителям предприятий необходимо принимать решения в ситуации неопределенности. Эффективное функционирование хозяйственной системы требует умелой экономической политики, и наоборот, эффективная политика требует лучшего понимания различных взаимосвязей между факторами и результатами хозяйственной деятельности. Хозяйственным руководителям, экономистам и лицам, ответственным за принятие управленческих решений, необходимо знать систему этих взаимосвязей и соответствующим образом влиять на них с целью улучшения экономических результатов хозяйствования. Устойчивое финансовое положение предприятия зависит от надежных экономически обоснованных управленческих решений по осуществлению хозяйственной деятельности. Рыночная экономика заставляет ЛПР задуматься над более широким использованием экономической информации, которой характеризуется работа предприятия.

Организация бизнес-процессов и управление ими, за счет очень большого числа учитываемых факторов, являются сложной деятельностью. В настоящее время практически невозможно осуществлять коммерческую деятельность без предварительного анализа этой деятельности, который позволяет показать различные результаты управленческих решений. Теоретической и практической основой предварительного анализа и принятия решений является имитационное моделирование бизнес-процессов и методов принятия решения, которое позволяет снизить степень неопределенности при прогнозировании в экономике и бизнесе. Руководитель, применяющий методы математического моделирования для обоснования своих управленческих решений получает дополнительную информацию и помощь. Модели-

рование все более стремительно, и самое главное, все более осознанно входит в нашу повседневную жизнь. И если ранее моделирование (в любом своем проявлении, таком как - физический эксперимент, математическое моделирование) считалось прерогативой ученых, то сейчас, с развитием компьютерной техники с одной стороны, и с большой информативностью нашей жизни с другой, - моделирование переходит на новую ступень осознания. Поэтому в последнее время во всем мире большое внимание уделяется не столько обучению моделированию, как какому-то самостоятельному предмету, а скорее осознанию самого процесса моделирования. При моделировании открываются широкие возможности для творческого поиска, так как обучающийся в значительной мере является первооткрывателем новых свойств и характеристик, новых результатов.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование - не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования "погружен" в более общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания. Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода научного познания.

Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале. Под моделирование понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключе-

ния по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Проникновение математики в экономическую науку связано с преодолением значительных трудностей. В этом отчасти была "повинна" математика, развивающаяся на протяжении нескольких веков в основном в связи с потребностями физики и техники. Но главные причины лежат все же в природе экономических процессов, в специфике экономической науки. Большинство объектов, изучаемых экономической наукой, может быть охарактеризовано кибернетическим понятием сложная система. В процессе построения модели осуществляется взаимосопоставление двух систем научных знаний - экономических и математических. Одна из важных особенностей математических моделей - потенциальная возможность их использования для решения разнокачественных проблем. Поэтому, даже сталкиваясь с новой экономической задачей, не нужно стремиться "изобретать" модель; вначале необходимо попытаться применить для решения этой задачи уже известные модели. При системном экономико-математическом моделировании исходная информация, используемая в одних моделях, является результатом функционирования других моделей.

Целью предлагаемого учебного пособия является демонстрация основных возможностей средств математического моделирования бизнес-процессов и систем, представление основных методов системного анализа, методов математического моделирования и принятия решений, а также развитие и закрепление у студентов навыков и умений системного подхода при решении практических задач анализа и управления сложных систем. С этой целью рассматривается ряд примеров по формализации задач коммерческой деятельности.

#### *1. Формулировка и обоснование цели написания учебного пособия*

В современных программных системах принятия решений в условиях неопределенности так или иначе предполагается использование знаний, опыта, интуиции лица, принимающего решение, (ЛПР) или экспертов. Можно выделить три подхода, связанных с применением знаний экспертов:

1) знания экспертов используются при построении математических моделей, позволяющих находить числовые оценки показателей качества (функций цели), с помощью которых можно оценивать степень эффективности процесса функционирования системы; в этом

случае знания экспертов используются при выборе структуры модели, построении функциональных уравнений, определении исходных данных, выборе функций цели и др.

2) знания экспертов задаются в виде базы знаний, что характерно для экспертных систем; в соответствующих программных продуктах эти базы знаний могут строиться на основе редукционных правил вывода, байесовского подхода и др.; накопление базы знаний – процесс достаточно длительный и требует привлечения большого числа экспертов;

3) знания экспертов используются непосредственно в процессе диалогового общения с системой принятия решения, при этом заранее не аккумулируются; сюда относятся такие методы, как "Метод расстановки приоритетов", "Метод анализа иерархий", "Метод достижимых целей" и др.

На практике, в реальных задачах принятия решений, конечно, могут использоваться все три подхода, быть может, с преобладанием одного из них.

В предлагаемом пособии предполагается рассмотреть вопросы принятия решений только в рамках первого подхода.

Имитационные модели систем обычно разбивают на два класса: статистические и аналитические. В этом пособии предполагается рассмотреть только модели второго класса. Для каждого типа моделей предлагается набор конкретных задач, в которых по вербальному описанию системы и требуемому результату необходимо построить конкретную математическую модель.

*Цель курса* продемонстрировать студентам основные возможности средств математического моделирования процессов и систем, дать представление об основных методах моделирования, на базе решения предлагаемых в пособии задач привить студентам навыки системного подхода при решении практических задач анализа и управления сложными системами и процессами с целью принятия решений в условиях неопределенности.

2. *Вид учебного пособия* – серийное.

3. *Актуальность и новизна учебного пособия*

В современном мире процессы в производстве, экологии, экономике, социологии и т.д. настолько взаимосвязаны и сложны, что задача принятия решения в любой такой области без применения на

базе дружеского интерфейса специальных программных средств становится просто невозможной. В связи с этим тема учебного пособия представляется весьма актуальной.

#### 4.5. *Тема, содержание и структура учебного пособия*

##### Тема 1. Введение

Понятие о системе и процессе ее функционирования. Системный анализ. Системный подход в моделировании процессов и систем. Декомпозиция системы, элементы, подсистемы. Состояние элементов, групп элементов, системы. Формализация понятия состояния. Характеристики состояния. Внешняя среда системы, входные и выходные воздействия, случайные факторы.

Динамическая система с дискретным вмешательством случая. Степени неопределенности описания системы.

Методы принятия решения в условиях неопределенности. Классификация. Свертка критериев. Модели и моделирование. Модель как нелинейная свертка критериев. Классификация моделей. Операционный подход, основные этапы и особенности. Примеры моделей процессов. Процесс конкурентной борьбы как обобщение процесса функционирования замкнутой системы. Неопределенность описания системы как принципиальное свойство математической модели.

##### Тема 2. Вероятностные аналитические модели

Состояния элементов системы, группы элементов и системы в целом, их связь с показателями эффективности. Характеристики состояния системы. Графы переходов системы из одного состояния в другое. Пуассоновские потоки. Плотности перехода. Уравнения Чепмена-Колмогорова и графы переходов. Модели систем массового обслуживания.

Различные подходы к построению моделей конкурентной борьбы, модели процесса взаимного уничтожения, гибели и размножения, поиска и слежения и др. Примеры моделей. Средние значения численности единиц, находящихся в некотором состоянии. Оценка дисперсии.

Задачи.

Тема 3. Детерминированные аналитические модели (модели динамики средних)

Состояния системы в моделях динамики средних, характеристики состояний. Граф переходов модели. Плотности переходов. Балансные уравнения динамики в среднем.

Модели динамики средних для систем массового обслуживания, процесса конкурентной борьбы, процесса поиска и слежения и др. Сравнительная характеристика вероятностных моделей и моделей динамики средних. Характер использования моделей динамики средних.

Фундаментальные модели воспроизводства, экономики и др. Задачи.

Тема 3. Модели системной (производственной) динамики.

Особенности аналитических моделей системной динамики. Отличие моделей системной динамики от моделей динамики средних. Графы причинно-следственных связей. Взаимосвязь моделей системной динамики и моделей динамики средних.

#### *6.7. Круг потенциальных читателей*

Материал пособия излагается автором в двух курсах лекций: на математико-механическом факультете (уже в течение более 20 лет) и на факультете менеджмента. Опыт показывает, что использование знаний, полученных в рамках такого курса, и соответствующих диалоговых программных комплексов позволяет значительно улучшить корректность принимаемых людьми решений в самых различных областях деятельности человека и независимо от уровня и должности, занимаемой лицом, принимающим решения.

Предполагается, что материал пособия будет доступен лицам, имеющим минимальную математическую подготовку и, в частности, студентам и слушателям факультета менеджмента, а так же студентам технических и экономических вузов.

Требования к уровню освоения содержания курса: слушатель должен уметь составлять математические модели систем в своей профессиональной области по их вербальному описанию.

#### **Сущность метода моделирования**

Моделирование предполагает построение действующей математической или реальной модели, которая обладает свойствами или

характеристиками целой рассматриваемой системы, то есть анализируя результаты действия этой модели можно прогнозировать результаты действия системы. Также можно, изменяя параметры модели, влиять на получение того или иного результата, а это дает возможность принимать те или иные решения в ходе действия исследуемой системы.

Таким образом, основной целью предмета моделирования является построение рациональной модели для определения поведения изучаемой системы. Имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы.

Моделирование предполагает построение действующей математической или реальной модели, которая обладает свойствами или характеристиками рассматриваемой системы в целом, Результатом действия этой модели является прогнозирование действия системы. Таким образом, основной целью предмета моделирования является построение рациональной модели для определения поведения изучаемой системы. В настоящее время математическое моделирование используется: 1) для численного экспериментирования или численного оценивания в условиях, когда проведение реального эксперимента связано с большими затратами или иском; 2) для ознакомления, изучения и совершенствования новых систем; 3) для проверки или демонстрации новой идеи системы или метода; 4) как средство планирования и прогнозирования. Традиционным подходом к построению модели является первоначальный сбор информации о требуемой задаче с выявлением всех факторов, имеющих отношение к последующему построению математической модели, то есть выделению цели моделирования, описанию рассматриваемой системы и ее рабочих состояний (характеристик). Формализация системы, или иначе переход от вербального описания к формализованной схеме, является одним из труднейших этапов построения модели. Успех моделирования зависит от умения выделять существенные элементы системы и определять взаимосвязи между этими элементами. Обучение искусству математического моделирования, которое состоит в умении перевести описание физической системы на математический язык, является важным направлением при подготовке современных

специалистов.

Процесс моделирования начинается с определения цели исследования. При построении математической модели записывается критерий эффективности процесса, являющийся математическим эквивалентом цели. Математическая модель - это формализованное представление системы в виде, удобном для исследования. Она задается совокупностью уравнений, неравенств, ограничений, операторов и других математических формул, определяющих выходные характеристики в зависимости от входных характеристик, параметров и начальных условий системы.

При моделировании конкретных систем приходится учитывать большое число всевозможных условий, существующих внутри системы, что требует больших временных затрат, поэтому в рамках учебного процесса, ограниченного временем, при обучении математическому моделированию конечной целью является не создание модели большой реальной системы, а на примере рассмотрения элементарных систем развитие у обучаемого умения и навыков формализации систем.

### 0.0.1 Понятие о системе

В зависимости от целей и предмета исследования существует большое число определений системы на различных уровнях строгости. Здесь мы приведем несколько определений известных специалистов, опираясь в основном на интуитивное представление о системах вообще, которое имеется у читателя.

Итак, система- это:

” ... комплекс элементов, находящихся во взаимодействии” (фон Бергаланфи);

”... множество элементов с отношениями между ними и между их атрибутами” (Фейджи Н, Холл);

”... совокупность элементов, организованных таким образом, что изменение, исключение или введение нового элемента закономерно отражается на остальных” (Топоров);

”...отображение входов и состояний объекта в выходах объекта” (Месарович).

Анализируя эти определения, можно выделить следующие характерные свойства систем:

1) система есть прежде всего совокупность элементов (объектов, подсистем, частей и т.д.);

2) между элементами системы (или их свойствами) существуют связи, которые в рамках рассматриваемой системы считаются более значительными (существенными, мощными), чем связи с элементами, не входящими в систему;

3) система обладает такими качествами, которые присущи только ей и не присущи никакой ее подсистеме или элементу; степень организации таких факторов > как объекты системы, связи между ними, элементы пространства и времени, в которых существует система, должна быть выше, чем если бы эти факторы рассматривались как нечто объективно существующее вне связи с системой.

Анализ и синтез систем обычно связаны с построением и изучением их моделей. Многие системы, несмотря на многообразие их связей, удается исследовать достаточно простыми средствами. Однако в настоящее время для большинства интересующих человека систем характерен так называемый барьер сложности, когда человек не в состоянии охватить всевозможные переплетения связей и явлений, составляющих поведение системы в целом, не в состоянии правильно оценить динамику системы и спрогнозировать последствия своих решений.

Изучение таких сложных систем обычно сводится к следующему. Система расчленяется на конечное число взаимосвязанных частей, называемых подсистемами; каждая подсистема вновь разбивается на подсистемы и т.д. до получения таких частей, которые на данном уровне исследования считаются неделимыми. Эти неделимые части называются элементами системы. При разбиении учитываются связи между подсистемами всех уровней. Далее для каждого элемента строится модель его функционирования. Все полученные модели объединяются в единую модель системы в целом, с помощью которой и производится дальнейшее ее исследование. Такой подход составляет сущность системного подхода. Процесс функционирования системы обычно рассматривается как последовательная смена ее состояний в некотором интервале времени. Состояние системы в каждый момент времени характеризуется набором величин, называемых характеристиками состояния. Выбор характеристик состояния зависит от свойств системы, способа решения задачи и цели исследования. Система функционирует при взаимодействии с внешней средой. Со стороны внешней среды на вход системы могут поступать

входные сигналы , которые влияют на изменение состояния системы. Влияние системы на внешнюю среду учитывается с помощью выходных сигналов , зависящих от состояния системы и входных сигналов. Входные сигналы могут быть случайными. Кроме того, на состояние системы могут оказывать влияние случайные факторы, возникающие внутри системы.

## **0.1 Эффективность систем и операционный подход**

Любая система предназначена для выполнения поставленных перед нею задач. Если цели и задачи, стоящие перед системой, четко определены, то можно говорить о качестве функционирования системы, которое оценивается с помощью показателей эффективности. Под показателем эффективности понимается такая числовая характеристика системы, с помощью которой оценивают степень приспособленности системы к выполнению поставленных перед нею задач.

В общем случае для оценки качества функционирования используют несколько показателей. Тогда говорят о многокритериальной задаче оценки качества. Показатель эффективности зависит от структуры системы, характера воздействий внешней среды значений параметров системы.

Существует специальная научная дисциплина, в рамках которой развиваются подходы к оценке качества функционирования Систем

и выработке рекомендаций по принятию решения. Она получила название "Исследование операций". Можно выделить четыре характерные особенности операционного метода исследования систем.

1. При операционном исследовании решаемая задача обычно рассматривается в целом, в комплексе, с учетом всех основных существенных свойств системы и во взаимодействии с внешней средой. Другими словами, операционный подход является системным подходом.

2. В исследовании операций осуществляется единство подхода к решению задачи независимо от ее конкретной сущности. Единство способа, а не предмета исследования - это вторая важная особенность операционного подхода в отличие от конкретных наук.

3. Операционный подход обязательно предполагает математизацию описания системы, т.е. строгое и возможно более полное и точное количественное описание явлений, предметов и связей, составляющих систему. Современные сложные системы в большинстве случаев невозможно изучать экспериментальным путем (часто бывает так, что система существует только в проекте, а выяснить эффективность ее функционирования бывает необходимо еще до постройки опытного образца). Поэтому операционный подход предполагает в первую очередь построение математической модели, а затем проведение с ее помощью мысленного (на ЭВМ) эксперимента.

4. В отличие от конкретных наук методы исследования операций применяются для получения вполне конкретных численных результатов, используемых непосредственно для принятия решения в данной ситуации. Если в традиционных научных дисциплинах (физике, химии и т.д.) модель явления обычно создается для построения соответствующей теории, отыскания основных закономерностей, то в исследовании операций модель служит для имитации, мысленного воспроизведения процесса функционирования системы с целью отыскания числовых характеристик показателей эффективности и оценки качества работы системы.

Процесс исследования системы при операционном подходе обычно разбивают на два этапа. Первый этап связан с анализом системы и построением ее математической модели, второй - с изучением свойств системы о помощи построенной модели. На втором этапе исходные посылки достаточно формализованы, и поэтому для выработки рекомендаций широко используются различные математические методы оптимизации (линейное и динамическое программи-

рования, дискретные методы оптимизации и т.д.). В этом смысле цель первого этапа - создать условия для применения этих математических методов. Другими словами, на первом этапе необходимо построить строгое математическое описание изучаемой системы. В данном пособии как раз и рассматриваются возможные схемы математического описания систем, при этом вопросы их анализа остаются в стороне.

Представим себе, что необходимо принять решение о выборе, например, одного из двух конкурирующих вариантов зерновых комбайнов, имеющихся, быть может, в опытном числе экземпляров. Для оценки их эффективности необходимо построить математическую модель, имитирующую процесс уборки зерна комбайнами. В этой модели, видимо, должны быть учтены такие факторы, как производительность комбайнов, возможные потери зерна, скорость передвижения, надежность, ремонтability, условия работы и т.п. Пусть  $N$  - первоначальное число комбайнов, участвующих в работе,  $N$  - начальное количество зерна, которое необходимо убрать,  $m(t)$  - количество комбайнов, участвующих в уборке в момент времени  $t$ ,  $n(t)$  - количество неубранного зерна. Очевидно, существуют некоторые функции  $\alpha$  и  $\beta$ , такие, что  $\dot{m} = \alpha m - \beta n$ . Зная эти функции и варьируя их параметры, уже можно сделать определенные выводы об эффективности рассматриваемых объектов.

По существу, задача первого этапа как раз и состоит в том, чтобы конкретизировать вид функций  $\alpha$ ,  $\beta$  и тем самым построить необходимую математическую модель. К схеме (1.2.1) можно свести многие процессы функционирования систем. Можно представить, что  $M$  - начальная численность средств, оценку эффективности которых необходимо дать;  $N$  - начальное количество работы, которую необходимо сделать;  $m(t)$  - количество работоспособных средств в момент времени  $t$ , а  $n(t)$  - остаток работы. Тогда взаимодействие между средствами, совершающими работу, и работой может быть в общем виде описано соотношениями (1.2.1). Понятно, что величины  $m(t)$  и  $n(t)$  в общем случае могут быть случайными. Описанное взаимодействие использовано в этом пособии в качестве основного примера, на котором иллюстрируются различные математические описания систем. Точнее, процесс взаимодействия, используемый далее во всех главах, выглядит следующим образом. Имеется две группы однородных единиц  $M$  и  $N$ . Их начальные численности соответственно  $M$  и  $N$ . Каждая  $i$ -я единица группы  $M$  выбирает себе цель из группы  $N$

и через некоторое случайное время мгновенно уничтожает ее (если, конечно, до этого эту цель не уничтожит какая-либо другая единица из  $M$  или не будет уничтожена сама  $i$ -я единица). После этого она выбирает новую цель с последующим ее уничтожением. Законы распределения выбора жертвы и величины, предполагаются заданными. Совершенно аналогично действуют единицы группы  $N$ , однако обозначения для них другие: цель для  $j$ -й единицы, интервал времени, законы распределения, . В качестве параметров распределений будут использоваться буквы  $\tau$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ ,  $\nu$ . Процесс моделирования продолжается на интервале . Обычно будем интересоваться остатками групп  $m(T)$  и  $n(T)$  в конечный момент времени  $T$ . Введенные обозначения сохраняются на протяжении всего пособия. Описанный процесс будет также называться процессом борьбы, противоборства, взаимного уничтожения и т.п.

## 0.2 Модели и их классификация

Обычно под моделированием понимают представление интересующей нас системы в виде, удобном для исследования.

Различают физическое и математическое моделирование.

Под физическим моделированием понимают воспроизведение изучаемого процесса с сохранением его физической природы. В качестве примеров можно привести продувку деталей самолета в аэродинамической трубе, исследование двигателей на стенде, различного вида тренажеры, макетные архитектурные модели и т.д. Из-за дороговизны и громоздкости физическое моделирование имеет ограниченную область применения. Математическое моделирование - это способ исследования процессов путем изучения явлений, имеющих различное физическое содержание, но описываемых одинаковыми математическими зависимостями. В связи с этим под математической моделью понимает совокупность соотношений (формул, уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т.п.), определяющих характеристики состояния системы и выходные сигналы в зависимости от параметров системы, входных сигналов и начальных условий. Как правило, совокупность соотношений реализуется в виде программы для ЭВМ. Условно классификацию математических моделей можно изобразить в виде, представленном на рис.1.1. Все математические модели удобно разбить на три группы: 1) мо-

дели, реализуемые на ЭВМ; 2) простейшие модели, для анализа которых достаточно карандаша и бумаги; 3) модели, реализуемые с помощью других физических явлений. В пособии рассматриваются только модели первой группы, хотя в качестве примеров часто используются модели второй группы. Далее модели можно разбить на вероятностные, с помощью которых чаще всего определяют распределения вероятностей для состояний системы, и детерминированные, служащие для непосредственного определения таких характеристик, как, например, математическое ожидание, дисперсия и др. Затем модели можно разделить на аналитические и статистические. Для первых характерно представление модели в виде совокупности дифференциально-алгебраических уравнений и использование классических численных или аналитических методов их решения. Статистические модели (или модели Монте-Карло) характеризуются многократным воспроизведением отдельных реализаций процесса функционирования с последующей обработкой полученного статистического материала.

В условиях рыночной экономики руководителям предприятий часто приходится принимать решения в ситуации неопределенности. Эффективное функционирование хозяйственной системы требует умелой и реальной экономической политики, и наоборот эффективная политика требует лучшего понимания различных взаимосвязей между факторами и результатами хозяйственной деятельности. Хозяйственным руководителям, экономистам, менеджерам - лицам, ответственным за принятие управленческих решений, необходимо знать систему этих взаимосвязей и соответствующим образом влиять на них с целью улучшения экономических результатов. Устойчивое финансовое положение предприятия зависит от надежных экономически обоснованных управленческих решений по осуществлению хозяйственной деятельности.

Организация бизнес-процессов и управление ими, за счет очень большого числа учитываемых факторов, являются сложной деятельностью. В настоящее время практически невозможно осуществлять коммерческую деятельность без предварительного анализа этой деятельности, который позволяет показать различные результаты управленческих решений. Теоретической и практической основой предварительного анализа и принятия решений является имитационное моделирование бизнес-процессов и методов принятия решения, которое позволяет снизить степень неопределенности при прогнозировании в

экономике и бизнесе.

Моделирование все более стремительно, и самое главное, все более осознанно входит в нашу повседневную жизнь. И если ранее моделирование (в любом своем проявлении, таком как - физический эксперимент, математическое моделирование) считалось прерогативой ученых, то сейчас, с развитием компьютерной техники с одной стороны, и с большой информативностью нашей жизни с другой, - моделирование переходит на новую ступень осознания. Поэтому в последнее время во всем мире большое внимание уделяется не столько обучению моделированию, как какому-то самостоятельному предмету, а скорее осознанию самого процесса моделирования. При моделировании открываются широкие возможности для творческого поиска, так как обучающийся в значительной мере является первооткрывателем новых свойств и характеристик, новых результатов.

Целью предлагаемого учебного пособия является демонстрация основных возможностей средств математического моделирования бизнес-процессов и систем, представление основных методов системного анализа, методов математического моделирования и принятия решений, а также развитие и закрепление у студентов навыков и умений системного подхода при решении практических задач анализа и управления сложных систем. Для этого рассматриваются примеры формализации задач коммерческой деятельности.

### **0.3 Сущность метода моделирования**

Основной целью предмета моделирования является построение рациональной модели для определения поведения изучаемой системы.

Имитационное моделирование есть процесс конструирования модели реальной системы и постановки экспериментов на этой модели с целью либо понять поведение системы, либо оценить (в рамках ограничений, накладываемых некоторым критерием или совокупностью критериев) различные стратегии, обеспечивающие функционирование данной системы.

Моделирование предполагает построение действующей математической или реальной модели, которая обладает свойствами или характеристиками рассматриваемой системы в целом, Результатом действия этой модели является прогнозирование действия системы. Таким образом, основной целью предмета моделирования является

построение рациональной модели для определения поведения изучаемой системы.

В настоящее время математическое моделирование используется:

1) для численного экспериментирования или численного оценивания в условиях, когда проведение реального эксперимента связано с большими затратами или иском;

2) для ознакомления, изучения и совершенствования новых систем;

3) для проверки или демонстрации новой идеи системы или метода;

4) как средство планирования и прогнозирования.

Традиционным подходом к построению модели является первоначальный сбор информации о требуемой задаче с выявлением всех факторов, имеющих отношение к последующему построению математической модели, то есть выделению цели моделирования, описанию рассматриваемой системы и ее рабочих состояний (характеристик). Формализация системы, или иначе переход от вербального описания к формализованной схеме, является одним из труднейших этапов построения модели. Успех моделирования зависит от умения выделять существенные элементы системы и определять взаимосвязи между этими элементами. Обучение искусству математического моделирования, которое состоит в умении перевести описание физической системы на математический язык, является важным направлением при подготовке современных специалистов.

Процесс моделирования начинается с определения цели исследования. Математическая модель - это формализованное представление системы в виде, удобном для исследования. Она задается совокупностью уравнений, неравенств, ограничений, операторов и других математических формул, определяющих выходные характеристики в зависимости от входных характеристик, параметров и начальных условий системы.

Основными этапами схемы перехода от вербального описания системы к формализованному являются:

1. выделение элементов системы;
2. определение состояний каждого элемента;
3. разделение на группы однородных элементов (с учетом состояний);
4. определение состояний групп;
5. определение состояний системы (с учетом состояний групп);

6. выбор характеристик состояний элементов, групп и системы в целом;

7. определение событий переходов системы из состояния в состояние;

8. построение графа переходов системы из одного состояния в другое и <взвешивание> его элементов;

9. составление при необходимости системы уравнений, описывающих систему, и ее решение.

При моделировании конкретных систем приходится учитывать большое число всевозможных условий, существующих внутри системы, что требует больших временных затрат, поэтому в рамках учебного процесса, ограниченного временем, при обучении математическому моделированию конечной целью является не создание модели большой реальной системы, а на примере рассмотрения элементарных систем развитие у обучаемого умения и навыков формализации систем.

## 0.4 О неопределенности при моделировании процессов

В общем случае многие процессы взаимодействия сводятся к схеме взаимного уничтожения. Если нам требуется оценить эффективность некоторой машины, то при построении операций мы заставляем эти машины выполнять некоторую работу, связанную с переводом объектов, над которыми совершается работа, из одного состояния в другое. С другой стороны, существует взаимодействие этих объектов на машины такое, что они из действующих (работающих) переходят в быстродействующие.

Таким образом, можно рассматривать некоторый абстрактный процесс взаимного уничтожения, носящий довольно общий характер.

Далее мы будем широко пользоваться этим процессом для иллюстрации различных моделей. Для его описания удобно использовать военную терминологию.

Предположим, что имеется две группировки  $X$  и  $Y$  (рис. 2.) перенумерованных объектов.

Начальная численность "иксов" равна  $X$ , "игреков" -  $Y$ . Пусть  $x(t)$ ,  $y(t)$  - текущие значения численностей соответствующих сто-

рон, так что  $x(0) = X$  и  $y(0) = Y$ . Процесс борьбы рассматривается на некотором интервале времени  $(0, T)$ . В каждый момент времени всякая единица  $i \in 1 : X$  имеет "на прицеле" единственную жертву  $n_i \in 1 : Y$ . И наоборот, всякая единица  $j \in 1 : Y$  пытается уничтожить жертву  $m_j \in 1 : X$ . Выбор жертвы происходит случайно из числа оставшихся в живых единиц противника. После выбора жертвы "охотник" в течении некоторого случайного времени прицеливается, после чего мгновенно ее уничтожает (конечно, если до этого времени не будет уничтожен сам). Затем выбирает новую жертву и т.д. в течении некоторого интервала времени  $(0, T)$ . За время прицеливания жертва своих свойств не изменяет, они изменяются мгновенно только в момент ее уничтожения.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$\bar{x}(t), \bar{y}(t)$  – средние значения численности сторон;

$xy(t)$  – состояние процесса в момент времени  $t$ , при котором имеется ровно  $x(t)$  "иксов" и  $y(t)$  "игреков".

Предположим, что средние численности сторон полностью и однозначно определяются временем  $t$  и начальными численностями  $X$  и  $Y$ , которые примем неслучайными:

$$\bar{x}(t) = \varphi(X, Y, t), \quad (1)$$

$$\bar{y}(t) = \psi(X, Y, t). \quad (2)$$

Сделаем небольшой анализ модели процесса борьбы. Сначала введем следующие временные (только на этот параграф) обозначения:

$$x(t) = \frac{\bar{x}(t)}{X}, \quad y(t) = \frac{\bar{y}(t)}{Y} \quad (3)$$

Подставив (3) в (1) и (2), получим вообще говоря, другие функции, однако оставим за ними те же обозначения:

$$x(t) = \varphi(X, Y, t), \quad (4)$$

$$y(t) = \psi(X, Y, t), \quad (5)$$

Сделаем следующие предположения:

1) функции  $\varphi$  и  $\psi$  в области

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1,$$

$$0 < t < \infty$$

непрерывны и имеют первую производную; это допущение сделано лишь с целью облегчения дальнейших рассуждений и не влияет на общность получаемых выводов;

2) значения  $x(t)$  и  $y(t)$  с течением времени не увеличиваются (рис. 3), т.е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \leq 0; \quad (6)$$

из (6), в частности, следует, что

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \leq 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \leq 0; \quad (7)$$

эти условия обычно всегда выполняются, если система замкнута, т.е. со стороны внешней среды нет пополнения ни для "иксов" ни для "игреков";

3) значение  $\bar{x}(t)$  при фиксированном  $t = T$  с увеличением  $X$  не уменьшается, а  $\bar{y}(t)$  – не увеличивается, то есть:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial X} \geq 0, \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial X} \leq 0. \quad (8)$$

Условия (8) означают, что, чем больше начальное количество средств имеется, тем больший объем работы будет сделан к моменту времени  $t = T$  и тем меньше износ средств, выполняющих работу.

Когда  $X$  мало, то к моменту времени  $t = T$  выполненный объем работы не велик, поэтому  $\bar{y}(T)$  близко к  $Y$  (рис.4), при этом значение  $\bar{x}(T)$  лежит, естественно, ниже прямой  $x = X$ . Если же  $X$  очень велико, то к тому же самому моменту времени  $T$  остаток работы приближается к 0, зато нагрузка на каждого "икса" уменьшается и поэтому  $\bar{x}(T) \approx X$ . Можно показать, что при определенных условиях монотонности:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial X} \geq \frac{\bar{x}}{X}. \quad (9)$$

Используя (8) и (9), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{x}}{X} \right) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} x - \bar{x} \right) = \frac{1}{X} \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} - \frac{\bar{x}}{X} \right) \geq 0, \\ \frac{\partial y}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\bar{y}}{Y} \right) = \frac{1}{Y} \frac{\bar{y}}{X} \leq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Предположим, что необходимо сделать оценку эффективности двух вариантов (типов, видов) средств (машин, объектов), условия работы которого описываются уравнениями (1) и (2) и приведенными допущениями. Здесь возможны два подхода.

**Прямой подход.** Заставим наши средства выполнять один и тот же объем работы в одинаковых условиях и посмотрим при этом, какие затраты потребуются для выполнения этой работы при использовании сравниваемых вариантов средств. Если затраты с использованием варианта  $A$  меньше, чем для варианта  $B$ , то можно считать, что вариант  $A$  лучше варианта  $B$ . Эти затраты будем упрощенно характеризовать двумя величинами (показателями эффективности).

$$\begin{aligned} F^1 &= X, \\ F^2 &= X - x(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Первый показатель характеризует первоначальные вложения, второй – наши затраты.

**Двойственный подход.** Выделим в некотором смысле одинаковые размеры (объемы) средств и определим, какую работу при этом они могут выполнить. В этом случае объем выполненной работы будем задавать показателями:

$$\begin{aligned} F^1 &= \bar{y}(t), \\ F^2 &= Y - \bar{y}(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь первый показатель определяет остаток работы, а второй – выполненную работу.

Так как двойственный подход исследуется аналогично прямому, то остановимся на прямом.

Поставим вопрос: что значит один и тот же объем работы? Вернее сказать так: что значит выполнить работу с одним и тем же результатом? Как зафиксировать этот результат? Здравый смысл подсказывает, что работа будет выполнена с одним и тем же *результатом*, если при  $Y = Y_0 = const$  к некоторому фиксированному моменту времени  $t = T$  относительные числа "иксов" и "игреков" соответственно будут равны заданным числам  $p$  и  $q$ , т.е. задание результата работы в этом случае равносильно заданию системы уравнений:

$$\begin{aligned} t &= T, \\ x(t) &= P, \\ y(t) &= q, \\ Y &= Y_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Однако оказывается, что при этом система уравнений (1),(2),(13), вообще говоря, может не иметь решения, так как число уравнений равно 6, а число переменных – пяти. Поэтому для описания результата работы мы должны использовать не 4 соотношения, как в (13), а только три. Будем считать, что работа выполнена с одинаковым результатом, если при  $Y = Y_0$  к концу работы оказались выполнены следующие соотношения:

$$R_1(x, y, t) = 0, \quad R_2(x, y, t) = 0. \quad (14)$$

Учитывая, что  $Y = Y_0 = const$ , перепишем систему уравнений (4),(5),(14) в виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi(X, t) - x = 0, \\ \Psi &= \psi(X, t) - y = 0, \\ R_1 &= R_1(x, y, t) = 0, \\ R_2 &= R_2(x, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Исследуем зависимости  $x$  от  $y$ , при  $t = t_1$  и  $x$  от  $t$  при  $y = y_1$ . Из первых двух уравнений (15) имеем:

$$t = const : \quad \begin{aligned} \Phi'_y + \Phi'_x X'_y + \Phi'_x X'_y &= 0, \\ \Psi'_y + \Psi'_x X'_y + \Psi'_x X'_y &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{t=const} = - \frac{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}{\Phi'_x \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_x} = - \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial X}}{\frac{\partial \psi}{\partial X}} \leq 0. \quad (16)$$

Учитывая, что зависимость  $x$  от  $y$  проходит через точки (0,1) и (1,0), соответствующую кривую можно изобразить так, как на рис. 5.

Аналогично можно исследовать, как  $x$  зависит от  $t$  при фиксированном значении  $y$ . Имеем:

$$y = const : \quad \begin{aligned} \Phi'_t + \Phi'_x X'_t + \Phi'_x X'_t &= 0, \\ \Psi'_t + \Psi'_x X'_t + \Psi'_x X'_t &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{y=const} = \frac{\Phi'_t \Psi'_y - \Phi'_x \Psi'_t}{\Phi'_t \Psi'_x - \Phi'_t \Psi'_x} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}} \leq 0.$$

Это означает, что с увеличением  $x$  при  $y = const$   $t$  уменьшается, поэтому (см. рис.5)  $t_3 > t_2 > t_1$ . При  $t \rightarrow 0$  зависимость  $x = f_t(y)$  совпадает с отрезками, образующими правую и верхнюю грани единичного квадрата.

Каждой точке кривой  $x = f_t(y)$  соответствуют некоторые значения показателей эффективности  $F^1 = X$  и  $F^2 = X - \bar{x}$ . Найдем характер их изменения вдоль кривой  $x = f_t(y)$  слева направо.

Снова продифференцируем  $\Phi$  и  $\Psi$  из (15) как неявные функции. Тогда получим:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{t=const} = - \frac{\Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y}{\Phi'_x \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_x} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \leq 0.$$

Таким образом,  $F^1 = X$  уменьшается. Это и понятно: уменьшение остатка "иксов" может быть в данном случае связано лишь с уменьшением начального количества средств  $X$ .

Для показателя  $F^2$  имеем:

$$\left. \frac{F^2}{dy} \right|_{t=const} = \frac{d(X - \bar{x})}{dy} = \frac{d(X - \bar{x})}{dx} \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} \left(1 - \frac{\partial \bar{x}}{\partial X}\right).$$

Так как  $\frac{\partial \psi}{\partial x} \leq 0$ , то из (10) следует, что  $\frac{\partial F^2}{\partial y} \leq 0$  при  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \leq 1$  и  $\frac{\partial F^2}{\partial y} \geq 0$  при  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \geq 1$ . Другими словами, существует критическая точка  $X^*$  такая, что при  $X \leq X^*$  потери растут, а при  $X \geq X^*$  потери падают.

Наконец, нам понадобится еще знать характер зависимости  $x$  от  $y$  при  $x = const$ . Произведя аналогичные выкладки, получим:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=const} = - \frac{\Phi'_y \Psi'_t - \Psi'_y \Phi'_t}{\Phi'_x \Psi'_t - \Psi'_x \Phi'_t} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \geq 0$$

Таким образом, при  $X = const$  величина  $x$  с возрастанием  $y$  увеличивается (рис. 6), а  $t$  вдоль кривой  $y = f_x(x)$  согласно предыдущим выводам уменьшается.

Итак, мы исследовали поведение модели, определяемой функциями  $\Phi$  и  $\Psi$ .

Теперь выясним свойства функций  $R_1$  и  $R_2$ , задающих результат работы. Ранее уже говорилось, что "естественное" задание работы в виде  $t = T$ ,  $x(t) = p$  и  $y(t) = q$  невозможно. Попробуем сделать по

другому. Потребуем, чтобы для одной из этих величин концу процесса (работы) выполнялось точное равенство, а две другие свяжем некоторой зависимостью, например:

$$\begin{aligned} R_1^1 &: q - y = 0, \\ R_2^1 &: R_2(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Другими словами, мы хотим сделать так, чтобы два результата работы считались одинаковыми (эквивалентными), если остаток "игреков" будет в обоих случаях равен  $q$ , а некоторое отклонение текущих средств  $x$  от  $p$  компенсировалось соответствующим эквивалентным отклонением  $t$  от  $T$ , а при выполнении равенств  $x = p$  и  $t = T$  равенство  $R_2^1(p, T) = 0$  выполнялось бы тождественно. По физическому смыслу задачи ясно, что отрицательное приращение  $x$  относительно  $p$  должно компенсироваться некоторым эквивалентным, но тоже отрицательным приращением  $t$  относительно  $T$ , т.е. если  $\Delta x$  приращение для  $x$ , а  $\Delta t$  - эквивалентное приращение для  $t$ , то

$$R_2^1(p - \Delta x, T - \Delta t) \equiv 0$$

Последнее означает, что:

$$\frac{\partial R_2^1}{\partial x} \frac{R_2^1}{\partial t} \leq 0.$$

(Для простоты предполагаем, что  $R_1$  и  $R_2$  непрерывны и имеют производные).

Система уравнений (15) будет иметь в этом случае вид:

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi(X, t) - x = 0, \\ \Psi &= \psi(X, t) - y = 0, \\ R_1^1 &= q - y = 0, \\ R_2^1 &= R_2(x, t) = 0, \quad R_2^1(p, T) \equiv 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Проанализируем введенный способ задания результата на графике (рис 7). Изобразим кривую  $x = f_t(y)$ , полученную из уравнений  $\Phi = 0$  и  $\Psi = 0$ . Точка 1, очевидно, соответствует  $x = p$  и  $t = T$ . В то же время, она удовлетворяет уравнению  $R_2^1$  из (17). Таким образом, кривая  $x = v_1(y)$ , соответствующая уравнениям  $\Phi = 0$ ,  $\Psi = 0$  и  $R_2^1 = 0$ , проходит через эту точку, а общее решение (16) может лежать на пересечении кривой  $x = v_1(y)$  и прямой  $y = q$  (уравнение  $R_1^1 = 0$ ).

Найдем характер изменения кривой  $x = v_1(y)$ , т.е. определим знак производной  $\frac{dv_1}{dy} = \frac{dx}{dy} \Big|_{\Phi=0, \Psi=0, R'_2=0}$ . Имеем:

$$\begin{aligned}\Phi'_y &= \Phi'_x X'_y + \Phi'_x X'_y + \Phi'_t t'_y = 0, \\ \Psi'_y &= \Psi'_x X'_y + \Psi'_x X'_y + \Psi'_t t'_y = 0, \\ R_2^{1'} &= R_2^{1'} X'_y + R_2^{1'} X'_y + R_2^{1'} t'_y = 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{dV_1}{dy} = \frac{-\frac{\partial R_2^1}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial R_2^1}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial R_2^1}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial x} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial R_2^1}{\partial x} / \frac{\partial R_2^1}{\partial t}} \leq 0.$$

С другой стороны, принимая во внимание (16), имеем

$$\frac{dv_1}{dy} \leq \frac{df_T}{dy}$$

и кривая  $x = v_1(y)$  приблизительно может быть проведена так, как показано на рис.7, т.е. правее точки 1 она выше кривой  $x = f_T(y)$ , а левее – ниже. В связи с этим в точке 2 имеем:  $x_2 \leq p$ ,  $t_2 \leq T$  и  $y = q$ . Таким образом, полученное решение определяет некоторый компромисс между отрицательным приращением  $\Delta x = x_2 - p$  и эквивалентным отрицательным приращением  $\Delta T = t_2 - T_1$ , другими словами, компромисс между проигрышем  $\Delta x$  в средствах и выигрышем  $\Delta t$  во времени.

Мы рассмотрели случай, когда точка  $(q, p)$  лежит выше кривой  $x = f_T(y)$ . Совершенно аналогично может быть рассмотрена ситуация, при которой точка  $(q, p)$  лежит ниже кривой (рис. 8). Но здесь, проигрыш  $\Delta t$  во времени компенсируется выигрышем  $\Delta x$  в средствах.

Выше говорилось, что кривая  $x = v_1(y)$  левее точки 1 не может лежать выше кривой  $x = f_T(y)$ . С другой стороны, правее точки 1 кривая  $x = f_T(y)$  не может лежать выше прямой  $x = p$ . В связи с этим рассмотрим предельный случай, когда  $x = v_1(y)$  левее точки 1 совпадает с кривой  $x = f_T(y)$ , а правее – с прямой  $x = p$ , при этом в точке 1 вновь полученная кривая имеет излом. Решение системы (17) – точка 2 – перейдет при этом в точку 3. Из рисунка 7 видно, что точка 3 соответствует следующим соотношениям:

$$y = q, \quad x = p, \quad t \leq T,$$

а из рисунка 8

$$y = q, \quad x \leq p, \quad t = T.$$

Эти две системы можно объединить в одну:

$$y = q,$$

$$(x = p) \wedge (t \leq T) \vee (x \geq p) \wedge (t = T).$$

или по другому:

$$\hat{R}_1^1 = R_1^1 = q - y = 0,$$

$$\hat{R}_2^1 = (|x - p| + |t - T| + |t - T|)(|t - T| + (p - x) + |p - x|) = 0,$$

где  $\hat{R}_2^1$  – частный случай уравнения  $R_2^1$ .

Очевидно, в этом частном случае никакой проигрыш во времени относительно  $T$  не может компенсировать даже бесконечно малый проигрыш по  $x$  относительно  $p$  и никакой проигрыш в средствах относительно  $p$  не может компенсировать никакой проигрыш во времени относительно  $T$ . Поэтому в отличие от  $R_1, R_2$  отношения  $\hat{R}_1, \hat{R}_2$  задают бескомпромиссную политику.

Известно, что бескомпромиссная политика более жестокая и обходится дороже. Также обстоит дело и тут. Действительно, с одной стороны  $0 \leq \frac{dx}{dy} < \infty$  при  $X = const$ , с другой –  $\frac{dx}{dy} \leq$  при  $t = const$ . Поэтому значение  $X$  в точке 3 больше, чем в точке 2. А это и означает, что при задании результата работы уравнениями  $\hat{R}_1^1 = 0, \hat{R}_2^1 = 0$  требуются большие средства, чем при выполнении работы, задаваемой уравнениями  $R_1^1 = 0, R_2^1 = 0$ .

Мы рассмотрели случай (17) когда  $y = q$ , а переменные  $x$  и  $t$  связываются уравнением. Теперь рассмотрим такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi &= \phi(X, t) - x = 0, \\ \Psi &= \psi(X, t) - y = 0, \\ R_1^2 &= T - t = 0, \\ R_2^2 &= R_2^2(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь предполагается, что всякое отрицательное (положительное) приращение  $x$  относительно  $p$  должно компенсироваться отрицательным (положительным) приращением  $y$  относительно  $q$ . Другими словами, для всякого приращения  $\delta x$ , должно существовать такое приращение  $\delta y$ , что

$$R_2^2(p - \delta x, q - \delta y) \equiv 0,$$

причем при  $\delta x = 0$  должно быть  $\delta y = 0$ , т.е.

$$R_2^2(p, q) \equiv 0$$

и

$$\frac{\partial R_2^2}{\partial x} \frac{R_2^2}{\partial y} \leq 0.$$

Отсюда можно найти, какой вид имеет кривая  $x = v_2(y)$ , определяемая уравнением  $R_2^2 = 0$ :

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\partial R_2/\partial y}{\partial R_2/\partial x} \geq 0.$$

Изобразим кривую  $x = v_2(y)$ , проходящую через точку  $(q, p)$ , и кривую  $x = f_T(y)$  на одном графике (рис.9) для случая, когда точка  $(q, p)$  выше кривой  $x = f_T(y)$ .

Решению системы (18) соответствует точка 2, определяющая эквивалентность между отрицательными приращениями  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Аналогично и в случае, когда точка  $(q, p)$  ниже кривой  $x = f_T(y)$  – рис.10.

Как и раньше, рассмотрим предельный случай, когда точки кривой  $x = v_2(y)$  имеют максимальные ординаты. Для этого переломим кривую  $x = v_2(y)$  в точке 1 и совместим ее левую часть с прямой  $x = p$ , а правую с прямой  $y = q$ . Тогда точка решения 2 перейдет в точку 3. Из рисунков 9 и 10 видно, что этому предельному случаю соответствуют условия:

$$t = T,$$

$$(x = p) \wedge (y \leq q) \vee (x \geq p) \wedge (y = q),$$

или по другому:

$$\hat{R}_1^2 = T - t = 0,$$

$$\hat{R}_2^2 = (|x - p| + (y - q) + |y - q|)(|y - q| + |p - x| + |p - x|) = 0.$$

И здесь имеем бескомпромиссное условие: никакой выигрыш по  $y$  относительно  $q$  не может компенсировать даже бесконечно малый проигрыш по  $x$  относительно  $p$ ; и никакой выигрыш по  $x$  не может компенсировать проигрыш по  $y$ . Не трудно убедиться, что и тут затраты по  $X$  при выполнении работы с результатом  $\hat{R}_1^2$  и  $\hat{R}_2^2$  больше, чем при выполнении работы с результатом  $R_1^2$  и  $R_2^2$  (значение  $X$  в точке 2 меньше, чем в точке 3).

Интересно сравнить результаты для общих случаев  $R_1^1$ ,  $R_2^1$  и  $R_1^2$ ,  $R_2^2$ . Для этого найдем, как изменяется  $X$  вдоль кривых  $x = v_1(y)$  и  $x = v_2(y)$ . Продифференцируем неявные функции  $\Phi, \Psi$  и  $R_2$  где под  $R_2$  понимается либо  $R_2^1$ , либо  $R_2^2$ :

$$\Phi'_y + \Phi'_x X'_y + \Phi'_x X'_y + \Phi'_t t'_y = 0,$$

$$\Psi'_y + \Psi'_x X'_y + \Psi'_x X'_x + \Psi'_t t'_y = 0,$$

$$R'_{2y} + R'_{2x} X'_y + R'_{2x} + R'_{2t} t'_y = 0.$$

и найдем  $X'_y$  для случаев  $R_2 = R_2^1(x, t)$  и  $R_2 = R_2^2(x, y)$ .

Если  $R_2 = R_2^1(x, t)$ , то  $\frac{\partial R_2}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$  и

$$X'_y = \frac{\Phi'_t \Psi'_y R'_{2x} - \Psi'_y \Phi'_x R'_{2t}}{\Phi'_x \Psi'_x R'_{2t} + \Phi'_x \Psi'_t R'_{2x} - \Phi'_t \Psi'_x R'_{2x}} = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial R_2}{\partial t}}{-\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial R_2}{\partial x}} = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial R_2 / \partial t}{\partial R_2 / \partial x}}{-\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial R_2 / \partial t} + (\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x})} \leq 0$$

Таким образом, вдоль кривой  $x = v_1(y)$  слева направо значение  $X$  уменьшается.

Теперь, пусть  $R_2 = R_2^2(x, y)$ . Тогда  $\frac{\partial R_2}{\partial t} = 0$  и  $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$ . Имеем:

$$X'_y = \frac{\Phi'_x \Psi'_t R'_{2y} + \Psi'_y R'_{2x} \Phi'_t}{\Phi'_x \Psi'_t R'_{2x} - R'_{2x} \Psi'_x \Phi'_t} = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial R_2}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial R_2}{\partial t} - \frac{\partial R_2}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial t}} = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial R_2 / \partial y}{\partial R_2 / \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

Предположим, что

$$-\frac{\partial R_2 / \partial y}{\partial R_2 \partial x} \leq \frac{\partial \phi / \partial t}{\partial \psi \partial t} \quad (19)$$

Попытаемся выяснить физический смысл этого неравенства. Его левая часть есть по существу отношение бесконечно малого приращения  $\sigma x$  к бесконечно малому изменению  $\delta y$ , которое априори задается уравнением  $R_2^2 = 0$ . Чтобы заданное отношение  $\frac{\delta x}{\delta y}$  было выполнено к моменту времени  $t = T$  наверняка, достаточно положить, чтобы при  $X = \text{const}$ , удовлетворяющем решению уравнений (19), всегда выполнялось бы неравенство:

$$\frac{\sigma x}{\sigma y} \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} \Big|_{x=\text{const}}.$$

Но правая часть этого неравенства по существу определяется отношением  $\frac{\partial\phi/\partial t}{\partial\psi/\partial t}$ . Таким образом, условие (19) определяет достаточное условие существования решения. Если оно справедливо, то тогда величина  $X$  вдоль кривой  $x = v_2(y)$  уменьшается. Построим все это на графике (рис.11).

Из графика видно, что от точки 2 до точки 3, а затем от точки 3 до точки 1 величина  $X$  уменьшается. Так как точка 2 соответствует способу задания работы  $R_2$ , а точка 1 – способу  $R_1$ , то в данном случае работу  $R_2$  выполнить труднее, чем работу  $R_1$ , т.е. требуется бóльших затрат  $X$ .

До сих пор мы рассматривали случай, когда точка  $(p, q)$  лежит выше кривой. Если она лежит ниже, то не трудно убедиться, что результат будет обратный, т.е. для выполнения работы  $R_2$  потребуется меньше средств, чем для работы  $R_1$ .

И, наконец, рассмотрим третий способ задания работы:

$$\begin{aligned}\Phi &= \phi(X, t) - x = 0, \\ \Psi &= \psi(X, t) - y = 0, \\ R_1^3 &= x - p = 0, \\ R_2^3 &= R_2^3(y, t) = 0.\end{aligned}\tag{20}$$

Снова, как и раньше, полагаем

$$R_2^3 = R_2^3(y, t) \equiv 0.$$

Кроме того, положительное приращение относительно  $q$  должно быть компенсировано отрицательным приращением  $t$  относительно  $T$ , т.е. для всякого  $\Delta y$  должно существовать эквивалентное  $\Delta t$ , что

$$R_2^3(q + \Delta y, T - \Delta t) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial R_2^3/\partial y}{\partial R_2^3/\partial x} g e 0.\tag{21}$$

Это можно пояснить следующим образом. Пусть величина  $y$  получила приращение относительно  $q$ , равное  $\Delta y$  и  $R_2^3(q + \Delta y, T) \leq 0$ , т.е.  $\frac{\Delta R_2^3}{\Delta y} \leq 0$ . Тогда, чтобы компенсировать нежелательное увеличение  $y$ , необходимо уменьшить  $t$  на эквивалентное приращение  $\Delta t$  и при этом должно быть  $R_2^3(q + \Delta y, T - \Delta t) = 0$ ,  $R_2^3(q + \Delta y, T) \leq 0$ , т.е.  $\frac{\partial R_2^3}{\partial t} \leq 0$ . Отсюда следует (21).

Найдем характер изменения кривой  $x = v_3(y)$  из уравнений  $\Phi = 0$ ,  $\Psi = 0$ ,  $R_2^3 = 0$ . Имеем:

Отсюда видно, что в зависимости от знака числителя может быть либо решение, определяемое точкой 1, либо точкой 2 (рис.12).

Найдем, как изменятся  $x$  вдоль кривой  $x = v_3(y)$ :

$$\frac{dX}{dy} = \frac{\Phi'_y \Psi'_x R_2^3 + \Phi'_x \Psi'_t R_2^3 - \Psi'_y \Phi'_x R_2^3}{\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial R_2^3}{\partial t}} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial R_2^3}{\partial y} - \frac{R_2^3}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial R_2^3}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial R_2^3 / \partial y}{\partial R_2^3 / \partial t} - 1}{\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

По тем же причинам, что и во втором случае, предположим что

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{R_2^3 / \partial y}{R_2^3 / \partial t} - 1 \geq 0$$

или

$$-\frac{\partial R_2^3 / \partial y}{\partial R_2^3 / \partial t} \leq \frac{1}{\frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

Кроме того, отсюда же:  $-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial R_2^3 / \partial t}{\partial R_2^3 / \partial y} \leq 0$  или  $-\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial R_2^3 / \partial t}{\partial R_2^3 / \partial y} \leq 0$ .

Тогда  $\frac{dV_3}{dy} \leq 0$  (единственное решение – точка 1) и  $\frac{dx}{dy} \leq 0$ . Таким образом, получается, что для выполнения работы  $R^3$  требуется наименьшее количество начальных средств из всех рассмотренных способов задания (рис. 12).

Если точка ниже кривой  $x = f_T(y)$ , то картина аналогична (рис.13). Однако, в этом случае для выполнения работы  $R^3$  требуется наибольшее количество средств по сравнению с другими способами задания.

Теперь остается рассмотреть частный случай заданий работы  $\hat{R}^3$ .

Сначала пусть точка  $(p, q)$  лежит выше кривой  $x = f_T(y)$  - рис. 12. Совместим кривую  $x = v_3(y)$  проходящую через точку 2 с кривой  $x = f_T(y)$ , а кривую  $x = v_3(y)$  проходящую через точку 1, с прямой  $y = q$ . Тогда решение 1 совместится с  $(p, q)$  а отношения, задающие работу, будут иметь вид:

$$\hat{R}_1^3 = x - p = 0, \hat{R}_2^3 = y - p = 0, t \leq T.$$

Если же точка  $(p, q)$  лежит ниже кривой  $x = f_T(y)$ , то аналогичное совмещение кривых приведет к единственной точке 3, которая не может быть решением, так как не выполняется отношение  $R_1^3 = x -$

$p = 0$  Таким образом, в этом случае решения нет, т.е. задание работы в виде

$$x - p = 0, \quad y \leq q, \quad t \leq T$$

в общем случае не возможно.

На этом закончим анализ рассматриваемой системы. В заключении лишь приведем некоторые конкретные виды функций для отношения  $R_2^2(x, y) = 0$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & x - y - p + q = 0, \\ 2) \quad & \frac{x}{y} - \frac{p}{q} = 0, \\ 3) \quad & \frac{1-x}{1-y} - \frac{1-p}{1-q} = 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение означает, что в конце работы разность между остатками "иксов" и "игреков" равна постоянному члену для любого времени  $t$ .

Второе уравнение требует постоянства отношения остатков, а третье - постоянства уничтоженных "иксов" и "игреков". Примерные зависимости даны на рис.14.

Из рисунка видно, что если точка  $(p, q)$  лежит выше кривой  $x = f_T(y)$ , то наиболее легко выполняется работа, задаваемая вторым уравнением, а наиболее трудно – третьим уравнением. Выше везде в основном рассматривался один показатель  $F^1 = X$ . Это объясняется тем, что его поведение проще, чем поведение показателя  $F^2 = X - x$ , которое зависит от положения критической точки  $x^*$ . В связи с этим его исследование требует дополнительной информации.

# Глава 1

## Вероятностные аналитические модели

### 1.1 Характеристика состояния

Характеристика состояния – вероятность состояния.....

### 1.2 Марковские процессы

В этой главе будут рассматриваться модели, в которых изменение состояния системы  $z(t) \in Z$  описывается однородным марковским случайным процессом. Это объясняется тем исключительным значением, которое имеют марковские процессы для моделирования систем различного класса, особенно систем массового обслуживания, экономических процессов, сетей надежности и др. Существуют даже специальные методы, которые позволяют "марковизировать" произвольные случайные процессы, заменяя их в некотором смысле эквивалентными марковскими.

Далее без ограничения общности предполагается, что состояние системы описывается вектором  $z(t)$  с конечным числом компонент, принимающим значения из счетного множества  $Z$ .

Случайный процесс  $z(t)$  называется марковским, если для произвольных моментов времени  $t > t_1 > t_2 > \dots > t_k$ ,  $\tau > 0$  и соответствующих состояний  $m, n, n^1, n^2, \dots, n^k \in Z$  вероятность перехода

$P(z(t + \tau) = m | z(t) = n, z(t_1) = n', z(t_2) = n^2, \dots, z(t_k) = n^k) = P(z(t + \tau) = m | z(t) = n) = P_{n \rightarrow m}(n, m, \tau, t)$ .

Другими словами, процесс  $z(t)$  называется марковским, если поведение системы после момента  $t$  зависит только от состояния  $z(t)$  и не зависит от того, как система попала в это состояние. Марковский процесс называется стационарным, если переходная вероятность  $P_{n \rightarrow m}(n, m, \tau, t)$  не зависит  $t$ . Поведение системы, описываемой стационарным марковским процессом, полностью задается двумя объектами: 1) вектором начальных распределений  $P_z(0)$  2) вероятностями  $P_{n \rightarrow m}(n, m, \tau)$ .

Согласно формуле полной вероятности вероятность того, что в момент  $t + \tau$  система будет находиться в состоянии  $z(t) = m$ , равна

$$P_m(t + \tau) = \sum_{n \in Z} P_{n \rightarrow m}(n, m, \tau) P_n(t).$$

В случае  $t = \Delta t$  имеем

$$P_m(t + \Delta t) = \sum_{n \in Z} P_{n \rightarrow m}(n, m, \Delta t) P_n(t). \quad (1.1.1)$$

Пусть  $\Lambda_m, \Lambda_{n \rightarrow m}(n, m)$  – интенсивности перехода, определяемые соотношениями

$$\Lambda_m = \Lambda_m(m) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{m \rightarrow m}(m, m, \Delta t)}{\Delta t},$$

$$\Lambda_{n \rightarrow m} = \Lambda_{n \rightarrow m}(n, m) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{n \rightarrow m}(n, m, \Delta t)}{\Delta t}, \quad n \neq m.$$

Предполагая, что  $\Lambda_m = \sum_{n \in Z \setminus \{m\}} \Lambda_{m \rightarrow n}(m, n) < \infty$  (при конечном  $Z$

это неравенство выполняется), отсюда получаем

$$\begin{aligned} P_{m \rightarrow m}(m, m, \Delta t) &= 1 - \Lambda_m(m) \Delta t + O(\Delta t), \\ P_{n \rightarrow m}(n, m, \Delta t) &= \Lambda_{n \rightarrow m}(n, m) \Delta t + O(\Delta t). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (1.1.1) и устремляя  $\Delta t$  к нулю, приходим к дифференциальным уравнениям для вероятностей соотношения системы:

$$\begin{aligned} \frac{dP_m}{dt} &= -\Lambda_m P_m(t) + \sum_{n \in Z \setminus \{m\}} \Lambda_{n \rightarrow m} P_n(t) = \\ &- \sum_{n \in Z \setminus \{m\}} \Lambda_{m \rightarrow n} P_m(t) + \sum_{n \in Z \setminus \{m\}} \Lambda_{n \rightarrow m} P_n(t) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

с начальными условиями  $P_m(0) = P_m^0$ . При конкретных выражениях для  $\Lambda_m$  и  $\Lambda_{n \rightarrow m}$  эта система может быть решена аналитически или численным методом.

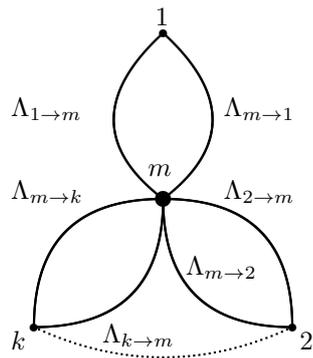


Рис. 3.1. Граф состояний.

Уравнениям (1.1.2) можно придать наглядный геометрический смысл с помощью графа состояний.

Каждому состоянию  $z \in Z$  сопоставляется вершина графа. Две вершины  $n$  и  $m$  соединены дугой (стрелкой), если существует ненулевая переходная интенсивность  $\Lambda_{n \rightarrow m}(n, m)$ . На рис. 1.1 дан фрагмент такого графа для вершины  $m$ . По графу можно сразу записывать дифференциальные уравнения. Для этого слева записывается производная от вероятности данного состояния  $m$ . Справа каждое слагаемое представляет собой произведение интенсивности  $\Lambda_{i \rightarrow j}(i, j)$  на вероятность того состояния, откуда идет соответствующая стрелка,  $m \in \{i, j\}$ . Слагаемое имеет знак плюс, если соответствующая стрелка направлена в вершину  $m$ , и знак минус – в противном случае.

### 1.3 Система массового обслуживания с отказами

Пусть система обслуживания состоит из  $M$  аппаратов (приборов, каналов).

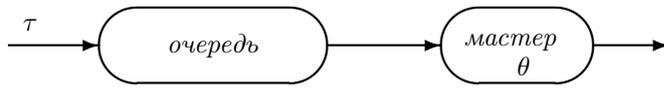


Рис. 3. Обслуживание с отказами.

Каждое требование (заявка), поступающая на обслуживание, занимает один из свободных аппаратов, на котором обслуживается в течение некоторого случайного времени  $\tau_k$ . Если при поступлении требования все каналы оказались занятыми, то требование уходит из системы необслуженным (говорят, что оно получило отказ). Требуется построить вероятностную модель системы для определения среднего значения  $\bar{m}(T)$  занятых, каналов в момент времени  $T$ .

Будем рассматривать в качестве состояния системы число занятых аппаратов  $m(m \in 0 : M)$ , так что  $P_m(t)$  – вероятность того, что система находится в состоянии  $m$ . Предположим, что интервал времени  $\tau_n$ , через который поступают требования в систему, распределен по показательному закону с параметром  $\lambda$ :

$$F_{\tau_n}(x) = P(\tau_n < x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

а интервал времени обслуживания  $\tau_k$  – по тому же закону, но с параметром  $\mu$ :

$$F_{\tau_k}(x) = P(\tau_k < x) = 1 - e^{-\mu x}.$$

Это означает, что поток требований, поступающих в систему, и поток требований, уходящих обслуженными с одного аппарата, – пуассоновские. Эти потоки обладают следующими свойствами:

1) отсутствием последействия. Это означает, что закон распределения числа требований, поступивших после некоторого момента времени  $t$ , не зависит от того, как и сколько требований поступило в систему до этого момента;

2) ординарностью. Согласно этому свойству вероятность появления более одного события за промежуток времени пренебрежимо мала, т.е. эта вероятность есть  $O(\Delta t)$ ;

3) стационарностью. Вероятность появления в любых  $k$  непересекающихся промежутках  $m_1, \dots, m_k$  требований зависит только от числа и длин промежутков (но не от расположения на оси времени).

Пуассоновские потоки обладают также еще одним важным свойством: сумма пуассоновских потоков снова образует пуассоновский

поток с интенсивностью, равной сумме интенсивностей составляющих потоков. В частности, величина  $\tau_{об}$ , равная интервалу времени между уходами двух последовательно обслуженных заявок  $m$  занятыми аппаратами, распределена по закону

$$F_{\tau_{об}} = P(\tau_{об} < x) = 1 - e^{-m\mu x}.$$

Отсюда следует, что величина  $m$  марковская и вероятности  $P_m(t)$  определяются уравнениями (1.1.2), где интенсивности  $\Lambda_{i \rightarrow j}$  выражаются через  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $m$ .

Отметим, что согласно свойству ординарности при  $|i - j| > 1$   $\Lambda_{i \rightarrow j} \Delta t = 0$ . Это означает, что переход системы из состояния  $i$  в состояние  $j$ , если  $|i - j| > 1$  не может осуществиться, ибо в противном случае за время  $\Delta t$  произошло бы более чем одно событие. В связи с этим граф состояний будет иметь вид, представленный на рис. 1.2. Здесь:

$$\begin{aligned} \Lambda_{m \rightarrow m-1} &= \Lambda_{m \rightarrow m-1}(m) = \mu m, \\ \Lambda_{m \rightarrow m+1} &= \Lambda_{m \rightarrow m+1}(m) = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq m < M \\ 0, & m = M, \end{cases} \\ \Lambda_{m-1 \rightarrow m} &= \Lambda_{m-1 \rightarrow m}(m) = \begin{cases} \lambda, & 0 < m \leq M \\ 0, & m = M, \end{cases} \\ \Lambda_{m+1 \rightarrow m} &= \Lambda_{m+1 \rightarrow m}(m) = \begin{cases} \mu(m+1), & 0 \leq m < M \\ 0, & m = M. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Подставляя (1.2.1) в систему (1.1.2), получаем систему дифференциальных уравнений, полностью согласованную с графом состояний (см.рис. 1.2):

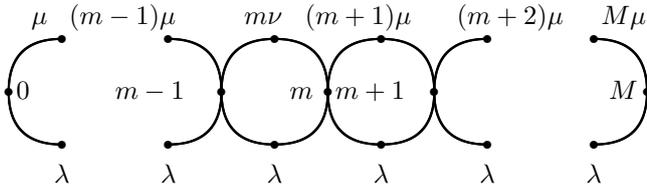


Рис. 3.2. Граф состояний для многоканальной системы обслуживания.

$$\frac{dP_m}{dt} = -(\lambda + \mu m)P_m + \lambda P_{m-1} + \mu(m+1)P_{m+1}, \quad m \in 0 : M-1. \quad (1.2.2)$$

$$\frac{dP_M}{dt} = -\mu M P_M + \lambda P_{M-1}.$$

Эту систему можно решить, например, при начальных условиях  $P_0 = 1$ ,  $P_m(0) = 0$ , если  $m > 0$ , а затем найти математическое ожидание числа занятых аппаратов:

$$E(m(T)) = \bar{m}(T) = \sum_{m \in 0:M} m P_m(t).$$

Видимо, такой подход возможен, если число уравнений в (1.2.2) не очень велико. Да и, вообще, методы, которые для определения отдельных характеристик распределения (в нашем случае – математического ожидания) требуют построения всего определения целиком, видимо, не могут считаться экономичными. Попробуем составить дифференциальное уравнение непосредственно для  $\bar{m}(t)$ . С этой целью каждое уравнение для  $P_m$  в (1.2.2) умножим на  $m$  и затем все их сложим. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}}{dt} = & -\lambda \sum_{m \in 1:M-1} m P_m - \mu \sum_{m \in 1:M-1} m^2 P_m + \lambda \sum_{m \in 1:M-1} m P_{m-1} + \\ & + \mu \sum_{m \in 1:M-1} (m-1) m P_{m+1} - \mu M^2 P_M + \lambda M P_{M-1}. \end{aligned}$$

Меняя пределы суммирования, переходя во всех членах к  $P_m$  и производя соответствующие взаимные уничтожения, в результате получим только одно уравнение

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = \lambda(1 - P_M) - \mu\bar{m}, \quad \bar{m}(0) = 0. \quad (1.2.3)$$

Как видим, для определения  $\bar{m}$  и в данном случае требуется знание  $P_M$ , т.е. снова пришли к необходимости решать систему (1.2.2). К счастью, во многих случаях (особенно при больших значениях ) вероятностью  $P_M$  можно пренебречь. Более подробно об этом см.гл. 4.

А сейчас получим уравнение (1.2.3), еще раз, но из несколько других соображений.

Пусть  $m(t)$  – число занятых аппаратов в момент времени  $t$ . Посмотрим как оно изменится за время  $\Delta t$ . Очевидно, что оно может уменьшиться на единицу с интенсивностью  $\Lambda_{m \rightarrow m-1}(m)$ , увеличиться на единицу с интенсивностью  $\Lambda_{m \rightarrow m+1}(m)$  либо остаться таким же. Поэтому

$$m(t + \Delta t) = m(t) - \Lambda_{m \rightarrow m-1}(m)\Delta t + \Lambda_{m \rightarrow m+1}(m)\Delta t + O(\Delta t). \quad (1.2.4)$$

Отсюда  $E(m(t + \Delta t)) = \bar{m}(t + \Delta t) = \bar{m}(t) - E(\Lambda_{m \rightarrow m-1}(m))\Delta t + E(\Lambda_{m \rightarrow m+1}(m))\Delta t$ . Так как  $\Lambda_{m \rightarrow m+1}(m)$  согласно (1.2.1) принимает нулевое значение с вероятностью  $P_M$ , то

$$\begin{aligned} E(\Lambda_{m \rightarrow m+1}(m)) &= \sum_{m \in 0:M-1} \lambda P_m = \lambda(1 - P_M), \\ E(\Lambda_{m \rightarrow m-1}(m)) &= \mu \bar{m}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (1.2.4), предельным переходом вновь получаем (1.2.3).

Отметим, что появление вероятности  $P_M$  в уравнении (1.2.3) объясняется тем, что фактический поток требований в систему, когда все аппараты заняты, равен 0, а не  $\lambda$ . Вопрос о возможности пренебречь ею чаще всего зависит от целей исследования и физических свойств самой системы.

## 1.4 Одноканальная система массового обслуживания с ожиданием

В системе имеется один канал с интенсивность обслуживания  $\mu$ .

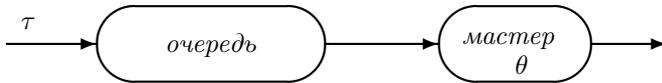


Рис. 3. Обслуживание с очередью.

Прибывающие с интенсивностью  $\lambda$  требования при занятом аппарате становятся в очередь, причем требование может уйти из очереди, не дождавшись начала обслуживания с интенсивностью  $\nu$  (через

время  $\tau_0$ ). Очередь может расти неограниченно. Предполагается, что все потоки требований пуассоновские (распределения времен  $\tau_k, \tau_0, \tau_n$  – экспоненциальные). Требуется найти среднее значение  $\bar{n}(T)$  очереди в момент времени.

В качестве состояния выбираем число требований в оистеме, так что  $P_n$  означает вероятность того, что  $n - 1$  требование находится в очереди и одно – на обслуживании. Граф состояний представлен на рис. 1.3 причем, как и в предыдущем случае, предполагается, что согласно свойству ординарности переходы системы из состояния  $n$ , могут осуществляться только в соседние.

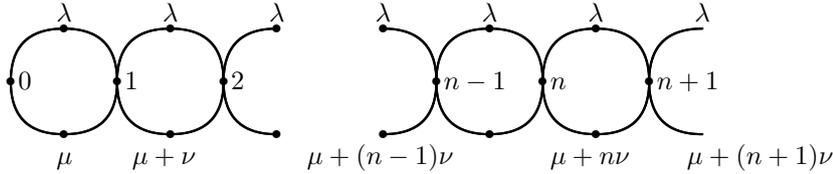


Рис. 1.3. Граф состояний для многоканальной системы обслуживания с ожиданием.

Определим интенсивности перехода:

$$\Lambda_{n \rightarrow n-1} = \Lambda_{n \rightarrow n-1}(n) = \begin{cases} \mu + (n-1)\nu, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

$$\Lambda_{n \rightarrow n+1} = \Lambda_{n \rightarrow n+1}(n) = \lambda, \quad (1.3.1)$$

$$\Lambda_{n-1 \rightarrow n} = \Lambda_{n-1 \rightarrow n}(n) = \begin{cases} \lambda, & n > 0, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

$$\Lambda_{n+1 \rightarrow n} = \Lambda_{n+1 \rightarrow n}(n) = \mu + n\nu.$$

Подставляя их в уравнение (1.1.2), получаем

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -(\lambda + \mu + (n-1)\nu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, \quad n > 0,$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad n > 0.$$

Эта система имеет бесконечное число уравнений. Хотя на практике всегда можно ограничиться при ее решении каким-то конечным их числом, тем не менее непосредственное решение с целью определения среднего количества требований в системе

$$E(n(T)) = \bar{n}(T) = \sum_{n>0} nP_n$$

встречает некоторые трудности.

Для получения дифференциального уравнения для  $\bar{n}(t)$ , как и раньше, умножим левую и правую части  $n$ -го уравнения из (1.3.2) на  $n$ , а затем просуммируем:

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = - \sum_{n>0} (\lambda + \mu + (n-1)\nu) n P_n + \sum_{n>0} \lambda_n P_{n-1} + \sum_{n>0} (\mu + n\nu) P_{n+1} - \lambda P_0 + \mu P_1.$$

Приводя все слагаемые к единому индексу  $n$  и при необходимости меняя нижние пределы суммирования, получим

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = -\nu(\bar{n} - (1 - P_0)) + \mu(1 - P_0) + \lambda. \quad (1.3.3)$$

Здесь, как и в (1.2.3), решение уравнения требует предварительного знания вероятности  $P_0(t)$ , получаемой в результате решения системы (1.3.2). Однако в ряде случаев (небольшая дисперсия случайной величины  $n(t)$ , перегруженность системы и следствие чего - большие очереди) ею можно пренебречь.

Получим еще раз уравнение (1.3.3), используя интенсивности (1.3.1). Снова записываем разностные уравнения для приращения числа требований за время  $\Delta t$ :

$$n(t + \Delta t) = n(t) - \Lambda_{n \rightarrow n-1}(n)\Delta t + \Lambda_{n \rightarrow n-1}(n)\Delta t + O(\Delta t).$$

Так как  $\Lambda_{n \rightarrow n-1}(n)$  с вероятностью  $P_0$  принимает значение 0, то

$$E(\Lambda_{n \rightarrow n-1}(n)) = \sum_{n>0} (\mu + (n-1)\nu) P_n = \nu(\bar{n} - (1 - P_0)) + \mu(1 - P_0);$$

$$E(\Lambda_{n \rightarrow n+1}(n)) = \lambda.$$

Очевидно, что вместе с предыдущим уравнением полученные соотношения приводят к (1.3.3).

## 1.5 Вероятностная модель процесса противоборства

В качестве состояния системы выберем пару - вектор  $\langle m(t), n(t) \rangle = mn$ , обозначающий, что в момент  $t$  на стороне  $M$  имеется  $m$  живых единиц, а на стороне  $N$  -  $n$  живых единиц. Пусть  $P_{mn}(t)$  - вероятность того, в момент времени  $t$  система находится в состоянии  $mn$ ;  $\lambda\mu$ ,  $\lambda\nu$  - интенсивности уменьшения единиц соответственно сторон  $M$  и  $N$ . Предполагаем, что интервалы  $\tau_\mu$  и  $\tau_\nu$  между двумя последовательными уничтожениями единиц одной нашей единицей распределены по экспоненциальному закону с параметрами  $\mu$  и  $\nu$ . Будем интересоваться средними значениями остатков в группах  $\bar{m}(T)$ ,  $\bar{n}(T)$  в некоторый момент времени  $T$ .

Обозначим  $P_m^\mu(t)$ ,  $P_n^\nu(t)$  безусловные вероятности того, что в группах  $M$  и  $N$  в момент времени  $t$  имеется ровно  $m(t), n(t)$  единиц. Тогда

$$P_m^\mu = \sum_{n \in 0:N} P_{mn}, \quad P_n^\nu = \sum_{m \in 0:M} P_{mn} \quad (1.4.1)$$

$$\bar{m} = \sum_{m \in 0:M} P_m^\mu m = \sum_{m \in 0:M} \sum_{n \in 0:N} P_{mn} m, \quad (1.4.2)$$

$$\bar{n} = \sum_{n \in 0:N} P_n^\nu n = \sum_{n \in 0:N} \sum_{m \in 0:M} P_{mn} n.$$

Ввиду того, что потоки событий в рассматриваемом процессе пуассоновские, из состояния  $mn$  возможны только два перехода - в соседние состояния  $m, n-1$  и  $n-1, m$ . Возможные переходы для всех состояний системы изображены на графе состояний (рис. 1.4). Прямо по графу находим интенсивности переходов:

$$\Lambda_{mn \rightarrow m-1, n}(m, n) = \begin{cases} \lambda\mu m, & 0 < m \leq M, 0 \leq n \leq N, \\ 0, & m = 0, \end{cases}$$

$$\Lambda_{mn \rightarrow m, n-1}(m, n) = \begin{cases} \lambda\nu n, & 0 \leq m \leq M, 0 < n \leq N, \\ 0, & n = 0, \end{cases}$$

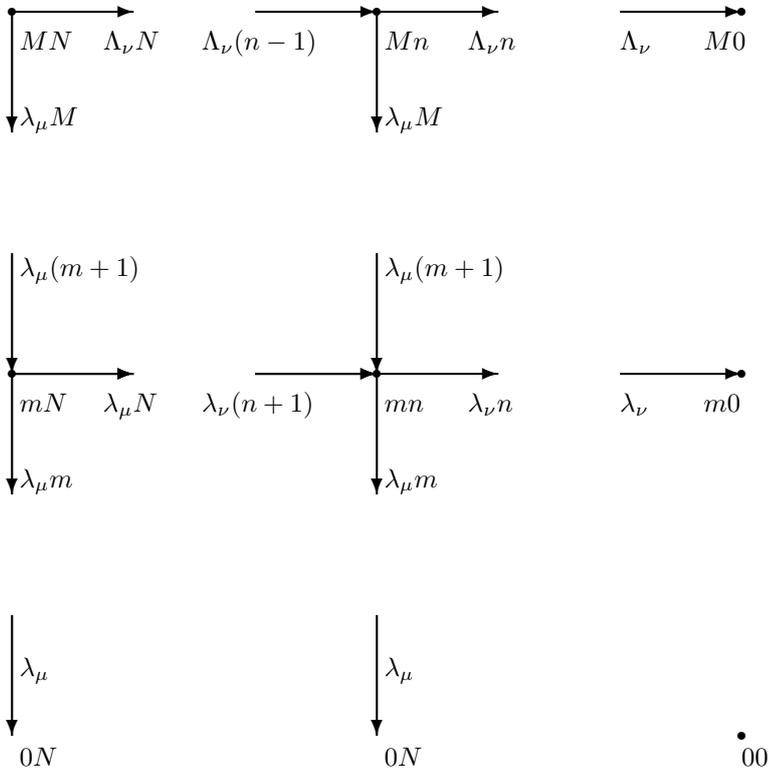


Рис. 1.4. Граф состояний процесса борьбы.

причем эти интенсивности равны нулю, соответственно с вероятностями  $P_0^\nu$  и  $P_0^\mu$ . Учитывая, что  $\lambda_\mu$  означает, какая часть единиц группы  $M$  уничтожается всеми единицами группы  $N$  в единицу времени, получаем

$$\lambda_\mu = \frac{\nu n}{m}, \quad \lambda_\nu = \frac{\mu m}{n}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущие, находим

$$\Lambda_{mn \rightarrow m-1, n}(m, n) = \begin{cases} \nu n, & 0 < m \leq M, 0 \leq n \leq N, \\ 0, & m = 0, \end{cases}$$

$$\Lambda_{mn \rightarrow m, n-1}(m, n) = \begin{cases} \mu n, & 0 \leq m \leq M, 0 < n \leq N, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Далее используем дифференциальные уравнения для состояний (1.1.2):

$$\frac{dP_{mn}}{dt} = -(\nu n + \mu m)P_{mn} + \nu(n+1)P_{m+1,n} + \mu(m+1)P_{m,n+1},$$

$$0 < m \leq M, \quad 0 < n \leq N;$$

$$\frac{dP_{m0}}{dt} = \mu m P_{m1}, \quad 0 \leq m \leq M, \quad n = 0;$$

$$\frac{dP_{0n}}{dt} = \nu n P_{1n}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad m = 0.$$

Эти уравнения можно решить при начальных условиях  $P_{mn}(0) = 0$ , если  $m < M$  и  $n < N$ ,  $P_{MN} = 1$ , после чего для вычисления средних значений остатков воспользоваться формулами (1.4.2). Однако значительно проще вывести уравнения для средних, используя второй подход из предыдущих параграфов.

Рассмотрим изменение численности стороны  $M$  за время  $\Delta t$ :

$$m(t + \Delta t) = m(t) - \Lambda_{mn \rightarrow m-1,n}(m, n)\Delta t + O(\Delta t).$$

Так как согласно (1.4.3).

$$E(\Lambda_{mn \rightarrow m-1,n}(m, n)) = \nu \sum_{n \in 1:N} \sum_{m \in 1:N} P_{mn} n + OP_0^\nu,$$

то, используя предельный переход, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}}{dt} &= -\nu \sum_{m \in 1:M} \sum_{n \in 1:N} P_{mn} n = \\ &= -\nu \sum_{n \in 1:N} n \sum_{m \in 1:M} P_n^\nu P_{m|n}^\nu = -\nu \sum_{n \in 1:N} n P_n^\nu \left( \sum_{m \in 1:M} P_{m|n}^\nu + P_{0|n}^\nu - P_{0|n}^\nu \right) = \\ &= -\nu \sum_{n \in 0:N} n P_n^\nu + \nu \sum_{n \in 0:N} n P_n^\nu P_{0|n}^\nu = \\ &= -\nu \bar{n} + \nu P_0^\mu \sum_{n \in 0:N} n P_{n|0}^\nu = \\ &= -\nu \bar{n} + \nu P_0^\mu \bar{n} \Big|_{m=0}. \end{aligned}$$

Здесь  $P_{0|n}^\nu$  – вероятность того, что сторона  $M$  уничтожена при условии наличия на стороне  $N$  ровно  $n$  единиц, а  $\bar{n}|_{m=0}$  – условное математическое ожидание. Совершенно аналогично  $\frac{d\bar{n}}{dt} = -\mu \bar{m} + \mu P_0^\nu \bar{m} \Big|_{n=0}$ .

Таким образом, и в этой модели для определения средних значений требуется знание вероятностей состояний. Если время  $T$  небольшое и к этому моменту обе группы еще далеки от полного уничтожения, то вероятности  $P_0^\nu$  и  $P_0^\mu$  не сильно отличаются от нуля и ими

можно пренебречь. Это справедливо и в том случае, когда дисперсии для  $m$  и  $n$  достаточно малы. Наличие вероятностей  $P_0^\nu$  и  $P_0^\mu$  в уравнениях для средних объясняется тем, что фактически интенсивности уничтожения равны нулю (а не  $\mu$  или  $\nu$ ), когда все единицы противника оказываются уничтоженными.

## 1.6 Вероятностная модель процесса противоборства

В отличие от предыдущих моделей предполагается, что время дискретное и принимает значения  $t = 0, 1, 2, \dots$ . Процесс взаимного уничтожения осуществляется следующим образом. В нечетный момент времени  $t = 1, 3, \dots$  каждая единица стороны  $M$  выбирает себе жертву и уничтожает ее с вероятностью  $p$ . Аналогично действует любая единица стороны  $N$  в четные моменты  $t = 2, 4, \dots$ , однако вероятность уничтожения цели равна  $q$ . Описанную схему взаимодействия групп можно представить конечной цепью Маркова, число состояний которой равно  $(N + 1)(M + 1)$ . Так как при больших  $M$  и  $N$  анализ модели затруднителен, то ограничимся случаем, когда  $M = N = 2$ .

Все возможные состояния системы образуют множество  $S = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ , в котором элемент  $mn$  означает, что в данный момент времени на стороне  $M$  имеется  $m$  единиц, а на стороне  $N - n$ .

Рассмотрим 1-й шаг. В результате его выполнения возможны следующие исходы:  $\{20, 21, 22\}$ . Соответствующие вероятности перехода равны

$$\begin{aligned} P_{22 \rightarrow 20} &= p^2, \\ P_{22 \rightarrow 21} &= p(1 - p) + (1 - p)p = 2(1 - p)p, \\ P_{22 \rightarrow 22} &= (1 - p)(1 - p) = (1 - p)^2. \end{aligned}$$

На следующем шаге уничтожаются единицы стороны  $M$ . В этом случае возможны такие исходы:

$$\begin{aligned} Q_{21 \rightarrow 11} &= q, \quad Q_{21 \rightarrow 21} = 1 - q, \quad Q_{22 \rightarrow 02} = q^2, \\ Q_{22 \rightarrow 12} &= 2q(1 - q)^2, \quad Q_{22 \rightarrow 22} = (1 - q)^2. \end{aligned}$$

На третьем шаге снова уничтожаются единицы стороны  $N$  и т.д. Весь процесс взаимного уничтожения можно развернуть в виде дерева (рис. 1.5).

Для того чтобы подсчитать вероятность пребывания системы в некотором состоянии, необходимо найти все вершины, соответствующие этому состоянию, а затем определить все пути из начального состояния в выделенные. После этого составить выражения, равные произведениям переходных вероятностей вдоль каждого пути, а затем просуммировать их по всем путям. Предположим, что нас интересует вероятность уничтожения всех единиц стороны  $N$  за три шага. Другими словами, нам необходимо найти вероятность попадания системы из состояния  $22$  в состояние  $m_0$  ( $0 < m \leq 2$ ) за три шага. Из рис. 1.5 сразу находим, что она равна

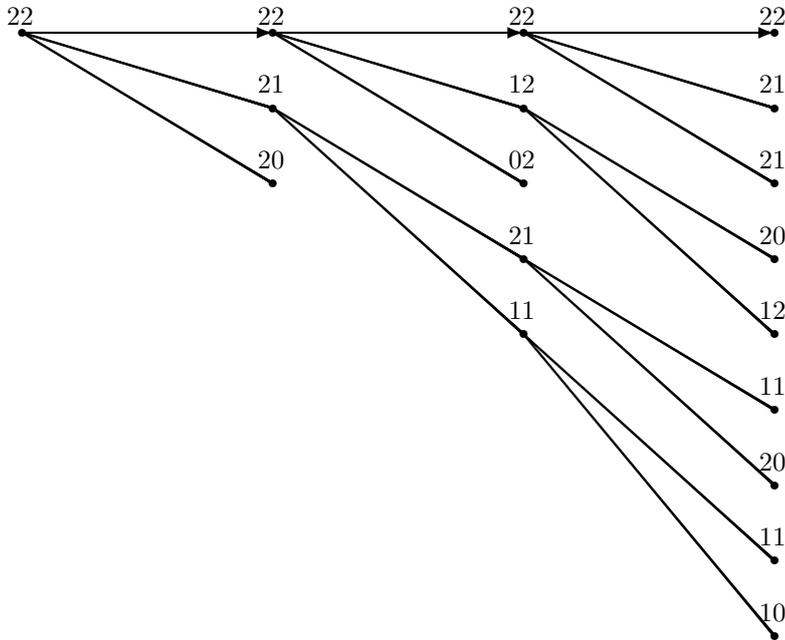


Рис.3.5. Дерево состояний процесса борьбы.

$$P_{22 \rightarrow 20} + P_{22 \rightarrow 22} Q_{22 \rightarrow 22} P_{22 \rightarrow 20} + P_{22 \rightarrow 21} (Q_{21 \rightarrow 21} P_{21 \rightarrow 20} + Q_{21 \rightarrow 11} P_{11 \rightarrow 10}) = p^2 + (1-p)^2(1-q)^2 p^2 + 2(1-p)p[(1-q)(2p-p^2) + qp].$$

Конечные состояния на дереве выделены кружочками.

Для этих же целей могут быть использованы и матричные соотношения. Построим две матрицы  $P = \|P_{ij} \rightarrow kl\|$  и  $Q = \|Q_{ij} \rightarrow kl\|$

для всех  $ij \in S$  и  $kl \in S$ . Выражение, стоящее на пересечении строки " $i, j$ " и столбца " $kl$ " определяет вероятность перехода из состояния  $ij$  в состояние  $kl$ . Рассмотрим матрицу, являющуюся произведением, составленным из  $P$  и  $Q$ , взятых  $s$  раз:

$$PQPQ\dots$$

Можно показать, что элемент, стоящий на пересечении строки  $ij$  и столбца  $kl$  этой матрицы, равен вероятности перехода из состояния  $ij$  в состояние  $kl$  в точности за  $s$  шагов. В частности, вероятность попадания системы в состояние  $m0$  за три шага будет равна сумме элемента  $(22, 20)$  матрицы  $P$  и элементов  $(22, m0)$  матрицы  $PQP$ ,  $m \neq 0$ .

Описанное представление системы наглядно и просто, однако такого рода моделями можно пользоваться лишь в том случае, когда число состояний системы не очень велико. Это замечание особенно касается матричного представления модели, так как на практике сами матрицы имеют обычно большое число нулей и пользование ими приводит к большим затратам машинного времени.

Отметим, что к схеме конечной цепи Маркова можно свести практически любой процесс с непрерывным временем, для чего достаточно интервал моделирования разбить на промежутки  $\Delta t$  и положить  $p = \mu\Delta t$  и  $q = \nu\Delta t$ .

## 1.7 Вероятностная модель поиска и слежения

Во многих случаях интересуются характеристиками системы не в переходный режим ее работы, а в установившийся, при  $t \rightarrow \infty$ . Последний может быть задан так называемым предельным распределением, к которому стремится распределение  $\{P_m(t) | m \in Z\}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это предельное распределение существует не всегда. В том случае, если граф состояний связан и число состояний конечно, то согласно эргодической теореме Маркова соответствующая марковская цепь имеет предельное распределение.

В следующем примере будем искать предельные характеристики системы. Пусть  $M$  – число разведчиков, осуществляющих поиск заданного числа  $N$  объектов ( $M \geq N$ ) в некотором районе. Поиск

ведется одним разведчиком с интенсивностью  $\mu$ . Каждый разведчик, отыскав объект, начинает следить за ним, при этом новым поиском он не занимается. В процессе слежения разведчик может потерять объект. Интенсивность потока потерь равна  $\nu$ . Будем интересоваться средней численностью найденных объектов в установившемся режиме.

Пусть  $n$  означает состояние системы, в котором осуществляется слежение за  $n$  объектами. Граф состояний системы приведен на рис. 1.6. Интенсивности перехода имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{n \rightarrow n+1}(n) &= (N-n)(M-n)\mu, \quad 0 \leq n \leq N, \\ \Lambda_{n \rightarrow n-1}(n) &= n\nu, \quad 0 \leq n \leq N, \\ \Lambda_{n+1 \rightarrow n}(n) &= \begin{cases} (n+1)\nu, & 0 \leq n < N, \\ 0, & n = N, \end{cases} \\ \Lambda_{n-1 \rightarrow n}(n) &= \begin{cases} (M-n+1)(N-n+1)\mu, & 0 < n \leq N, \\ 0, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

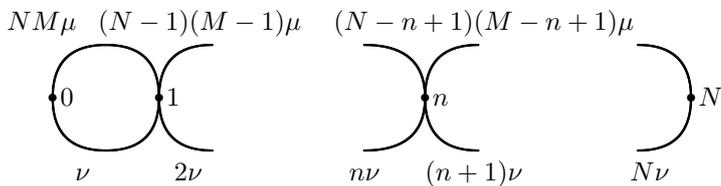


Рис. 1.4. Граф-состояний системы поиска.

Подставляя эти интенсивности в уравнения (1.1.2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dt} &= -MN\mu P_0 + \nu P_1, \quad n = 0, \\ \frac{dP_n}{dt} &= -n\nu P_n - (N-n)(M-n)\mu P_n + (n+1)\nu P_{n+1} + \\ &+ (M-n+1)(N-n+1)\mu P_{n-1}, \quad 0 < n < N, \end{aligned}$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -N\nu P_N + (M - N + 1)\mu P_{N-1}, \quad n = N.$$

Из рис. 1.6 видно, что граф связан и число состояний конечно. Это означает, что предельные вероятности существуют. Для их нахождения приравняем правые части полученных уравнений к 0 и (для простоты как предельные, так и переходные вероятности будем обозначать одинаково):

$$\begin{aligned} -NM\mu P_0 + \nu P_1 &= 0, \\ -n\nu P_n - (N - n)(M - n)\mu P_n + (n + 1)\nu P_{n+1} + \\ + (M - n + 1)(N - n + 1)\mu P_{n-1} &= 0, \quad 1 \leq n \leq N - 1, \\ -N\nu P_N + (M - N + 1)\mu P_{N-1} &= 0. \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha = \mu/\nu$ .

Тогда из первого уравнения имеем

$$P_2 = \alpha MN P_0.$$

Выбираем уравнение для  $n = 1$  и из него находим

$$P_2 = \alpha \frac{(M - 1)(N - 1)}{2} P_1.$$

Поступая аналогично, найдем из уравнения для  $n - 1$ :

$$P_n = \alpha \frac{(M - n + 1)(N - n + 1)}{n} P_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Отсюда

$$P_n = \alpha^n \frac{(N - n + 1)(M - n + 1)}{n} \dots \frac{NM}{1} P_0 \frac{n!}{n!} = \alpha^n \binom{N}{n} \binom{M}{n} P_0 n!$$

Так как  $\sum_{n \in 0:N} P_n = 1$ , то  $P_0 \sum_{n \in 0:N} \binom{N}{n} \binom{M}{n} \alpha^n n! = 1$ . Поэтому

$$P_n = \frac{\alpha^n \binom{N}{n} \binom{M}{n} n!}{\sum_{n \in 0:N} \alpha^n \binom{N}{n} \binom{M}{n} n!}$$

Наконец, используя формулу для среднего значения  $\bar{n}$ , окончательно имеем

$$\bar{n} = \sum_{n \in 0:N} n P_n = \frac{\sum_{n \in 0:N} n \alpha^n \binom{N}{n} \binom{M}{n} n!}{\sum_{n \in 0:N} \alpha^n \binom{N}{n} \binom{M}{n} n!}. \quad (1.6.2)$$

Несмотря на наличие явного вида для  $\bar{n}$ , пользование этой формулой затруднительно. Это связано с тем, что при больших  $n$  числитель и знаменатель являются очень большими числами примерно одного порядка. В связи с этим увеличение  $n$  при фиксированном числе разрядов ЭВМ ведет к резкому падению точности вычислений.

## Глава 2

# Модели динамики средних

### 2.1 Основное допущение моделей динамики средних

Вероятностные модели позволяют найти распределение вероятностей пребывания системы в отдельных состояниях систем, а по ним определить необходимые характеристики: математические ожидания, дисперсии и т.д. В некоторых случаях, оказывается, можно записать приближенные уравнения непосредственно для интересующих нас характеристик. В частности, в рассмотренных в предыдущей главе примерах пренебрежение вероятностями пребывания системы в граничных состояниях как раз и приводило к искомым уравнениям. При составлении уравнений динамики средних используется более общее допущение, включающее указанные как частный случай.

При построении модели предполагается, что система состоит из некоторого конечного числа элементов, которые можно разбить на группы однородных элементов. Далее обычно составляют уравнения модели для каждой группы отдельно, а взаимовлияние групп учитывают через коэффициенты уравнений. В связи с этим далее предполагаем, что система состоит из группы однородных единиц и что любая из них находится в одном из состояний  $S_1, S_2, \dots, S_k$ . Пусть общее

количество единиц равно  $M$ , а число единиц в состоянии  $S_i, i \in 1 : k$ , равно  $m_i$  ( $0 \leq m_i \leq M$ ). Тогда вектор означает состояние системы в целом. Очевидно, что общее число состояний равно  $(M + l)^k$ . Именно столько уравнений необходимо записать, чтобы построить вероятностную модель для определения вероятностей пребывания  $P_m$  в состоянии  $m$ . Для моделей динамики средних достаточно составить лишь  $k$  уравнений – по числу состояний, в которых может пребывать один типичный элемент системы. В частности, возможен следующий подход. Пусть  $x_i^j$  – случайная величина, равная 1, если  $j$ -я единица находится в состоянии  $S_i$ . В противном случае она равна 0. Вероятности, с которыми она принимает значения 1 и 0, соответственно равны  $p_i$  и  $1 - p_i$ . Тогда

$$m_i(t) = x_i^1(t) + x_i^2(t) + \dots + x_i^M(t),$$

$$E(m_i(t)) = \bar{m}_i(t) = \sum_{j \in 1:N} E(x_i^j(t)).$$

Так как  $E(x_i^j(t)) = p_i(t)$ , то

$$\bar{m}_i(t) = M p_i(t). \quad (2.1.1)$$

Таким образом, рассматривая изменение состояния только одного элемента, можно подсчитать с помощью вероятностной модели вероятности  $p_i(t), i \in 1 : M$ , пребывания типовой единицы в каждом состоянии, а затем перейти к математическим ожиданиям (дисперсиям и др.).

Однако можно сразу составить уравнения динамики средних, вводя одно лишь допущение относительно вероятностных моделей.

Пусть  $A_i^-$  – такое множество состояний, в которые может перейти любая единица из состояния  $S_i$  в другие, а  $A_i^+$  – множество состояний, из которых единица может перейти в состояние  $S_i$ . Как для  $A_i^-$ , так и для  $A_i^+$  можно принять, что  $LLLS_i \Rightarrow S_j \neq 0$ . Обозначим  $\Omega_{S_i}^-(m)$  и  $\Omega_{S_i}^+(m)$  соответственно отрицательное и положительное приращения величины  $m_i$  в единицу времени (интенсивности приращения). Тогда

$$\frac{dm_i}{dt} = -\Omega_{S_i}^-(m) + \Omega_{S_i}^+(m), \quad (2.1.2)$$

$$\Omega_{S_i}^-(m) = \sum_{S_k \in A_i^-} \Omega_{S_i \rightarrow S_k}(m),$$

$$\Omega_{S_i}^+(m) = \sum_{S_k \in A_i^+} \Omega_{S_j \rightarrow S_i}(m),$$

где  $m = m[1 : k]$ , а интенсивность  $\Omega_{S_i \rightarrow S_j}(m)$  означает, сколько единиц переходит из состояния  $i$  в состояние  $j$  в единицу времени, в общем случае зависит от вектора  $m$ .

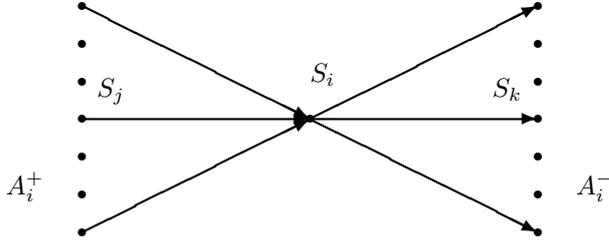


Рис.2.1. Граф для состояния  $S_i$

Так как  $m_i(t), i \in 1 : k$ , при фиксированном  $t$  – случайная величина, то можно найти ее математическое ожидание, если допустить, что

$$\Omega_{S_i}^-(m) \approx \Omega_{S_i}^-(\bar{m}), \quad \Omega_{S_i}^+(m) \approx \Omega_{S_i}^+(\bar{m}), \quad (2.1.3)$$

Находя математическое ожидание из (4.1.2) и используя при этом (4.1.3), получаем совокупность дифференциальных уравнений для средних  $\bar{m}_i$ :

$$\frac{d\bar{m}_i}{dt} = - \sum_{S_k \in A_i^-} \Omega_{S_i \rightarrow S_k}(\bar{m}) + \sum_{S_k \in A_i^+} \Omega_{S_k \rightarrow S_i}(\bar{m}), \quad (2.1.4)$$

где  $i \in 1 : k$ .

Соотношения (2.1.3) приближенные, поэтому формальное решение уравнений (2.1.4) может привести к тому, что  $\bar{m}_i(t)$  примет значения, не соответствующие тем, которые существуют в реальной системе. В связи с этим для  $\bar{m}_i(t)$  при решении (2.1.4) задают область значений  $Z \ni \bar{m}(t)$ .

Таким образом, суть метода динамики средних состоит в том, что уравнения модели (2.1.4) пишутся сразу для математических ожиданий с учетом допущений (2.1.3). Это допущение предполагает, что *математическое ожидание от функции можно приближенно, но с достаточной для практики точностью, заменить функцией от математического ожидания.*

Модель динамики средних удобно описывать графом состояний, который несколько отличается от графа состояний вероятностной модели. Каждому состоянию единицы системы  $S_i, i \in 1 : k$ , ставится в соответствие вершина графа, которой приписывается вес  $\bar{m}_i$ , равный средней численности единиц, находящихся в этом состоянии. Из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  следует стрелка (дуга) с весом  $\Omega_{S_i \rightarrow S_j}$ , если интенсивность  $\Omega_{S_i \rightarrow S_j} \neq 0$ . Эта интенсивность должна означать, какое число единиц переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  в единицу времени. В общем случае она зависит от численности всех состояний. Предполагается, что состояние  $S_0$  относится к внешней среде системы.

Число уравнений модели динамики средних равно числу состояний  $S_1, S_2, \dots, S_k$ . Для составления уравнения, соответствующего состоянию  $S_k$ , слева записывается производная от веса вершины  $\bar{m}_k$ , а справа – алгебраическая сумма весов тех дуг, которые инцидентны вершине  $\bar{m}_k$ . При этом веса дуг, идущих из вершины  $\bar{m}_i$ , берутся со знаком минус, а веса дуг, которые заходят в вершину  $\bar{m}_i$ , – со знаком плюс,  $i \in 1 : k$ .

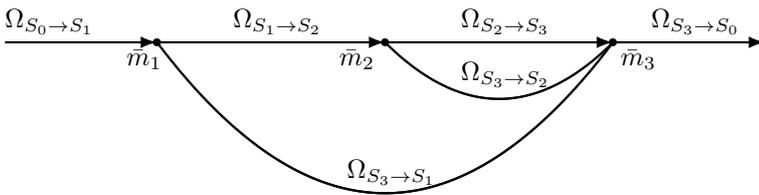


Рис. 2.1.2. Граф состояний в модели динамики средних

На рис. 2.1.2 изображен пример графа состояний некоторой си-

стемы, описываемой дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\bar{m}_1}{dt} = -\Omega_{S_1 \rightarrow S_2}(\bar{m}) + \Omega_{S_0 \rightarrow S_1}(\bar{m}) + \Omega_{S_3 \rightarrow S_1}(\bar{m}),$$

$$\frac{d\bar{m}_2}{dt} = -\Omega_{S_2 \rightarrow S_3}(\bar{m}) + \Omega_{S_1 \rightarrow S_2}(\bar{m}) + \Omega_{S_3 \rightarrow S_2}(\bar{m}),$$

$$\frac{d\bar{m}_3}{dt} = -\Omega_{S_3 \rightarrow S_0}(\bar{m}) - \Omega_{S_3 \rightarrow S_1}(\bar{m}) - \Omega_{S_3 \rightarrow S_2}(\bar{m}) + \Omega_{S_2 \rightarrow S_3}(\bar{m}),$$

где  $m = \langle \bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3 \rangle$  – вектор состояния системы. В ряде случаев вместо нескольких интенсивностей задается суммарная интенсивность, переводящая единицы из одного состояния в несколько других. Например, вместо интенсивностей  $\Omega_{S_3 \rightarrow S_0}(\bar{m}), \Omega_{S_3 \rightarrow S_1}(\bar{m}), \Omega_{S_3 \rightarrow S_2}(\bar{m})$  может быть задана интенсивность  $\Omega_{S_3}^-(\bar{m})$ . Тогда вместе с нею должны быть еще заданы вероятности перехода  $p_{S_3 \rightarrow S_j}, j \in 0 : 2$ , так что

$$\Omega_{S_3 \rightarrow S_j}(\bar{m}) = \Omega_{S_3}^-(\bar{m})p_{S_3 \rightarrow S_j}, \quad \sum_{j \in 0:2} p_{S_3 \rightarrow S_j} = 1.$$

Часто пользуются не абсолютными значениями интенсивностей  $\Omega_{S_i \rightarrow S_j}(\bar{m})$ , а относительными –  $\omega_{S_i \rightarrow S_j}(\bar{m}) = \Omega_{S_i \rightarrow S_j}(\bar{m})/\bar{m}_i$ , которые означают, какая часть единиц переходит из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  в единицу времени. Эти интенсивности не следует путать между собой, тем более, что при  $i \neq 0$  всегда применяют только абсолютные значения.

## 2.2 Модель динамики средних для системы МО с отказами

Исходные положения для системы сформулированы в п.1.2.

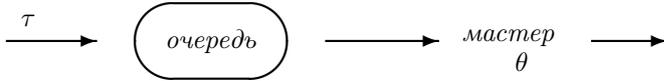
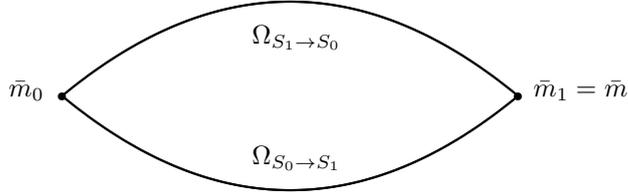


Рис. 3. Обслуживание с очередью.

Так как система состоит из однородных единиц – аппаратов, то можно рассматривать только два состояния:  $S_0$  – аппарат свободен и  $S_1$  – аппарат занят. Соответствующие характеристики этих состояний:  $\bar{m}_0(t)$  и  $\bar{m}_1(t) = \bar{m}(t)$  (см. рис.2.2.1).



### 2.2.1. Граф состояний в модели МО с отказами.

Используя допущение (2.1.3), сразу по графу состояний (рис.2.2.1) можно записать уравнение динамики средних для математического ожидания занятых аппаратов  $\bar{m}(t)$ :

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = -\Omega_{S_1 \rightarrow S_0}(\bar{m}) + \Omega_{S_0 \rightarrow S_1}(\bar{m}).$$

Так, как согласно (3.2.1)

$$\begin{aligned} \Omega_{S_1 \rightarrow S_0}(\bar{m}) &= \Lambda_{\bar{m} \rightarrow \bar{m}-1}(\bar{m}) = \mu \bar{m} \\ \Omega_{S_0 \rightarrow S_1}(\bar{m}) &= \Lambda_{\bar{m} \rightarrow \bar{m}+1}(\bar{m}) \lambda, \end{aligned}$$

то имеем

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = -\mu \bar{m} + \lambda.$$

Это уравнение действительно лишь тогда, когда  $\bar{m} \leq M$ . Если в результате решения для некоторых  $t$  будет  $\bar{m} \geq M$ , то в этом случае необходимо считать, что  $\bar{m} = M$  и  $\frac{d\bar{m}}{dt} = 0$ . Таким образом,  $Z = \{\bar{m} | \bar{m} \leq M\}$ . Полученное уравнение не отличается от (1.2.3), если в последнем пренебречь вероятностью  $p_M$ . Это связано с тем, что допущение, принятое в моделях динамики средних, не играет существенной роли, если дисперсии случайных величин не слишком велики.

## 2.3 Модель динамики средних для систем МО с ожиданием

Для этой системы исходные положения сформулированы в п.3.3. Как и раньше, будем искать среднее значение очереди  $\bar{n}(t)$ . По этой причине можно считать, что система состоит из однородных единиц –

требований. Каждое требование может либо ожидать в очереди (состояние  $S_1$ ), либо находиться вне системы (состояние  $S_0$ ). Граф состояний изображен на рис.2.3.1.

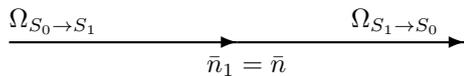


Рис.2.3.1. Граф состояний модели МО с ожиданием.

Дифференциальное уравнение для средней численности  $\bar{n}_1(t) = \bar{n}(t)$  имеет вид

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = -\Omega_{S_1 \rightarrow S_0}(\bar{n}) + \Omega_{S_0 \rightarrow S_1}(\bar{n}).$$

Из (1.3.1) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{S_1 \rightarrow S_0}(\bar{n}) &= \Lambda_{\bar{n} \rightarrow \bar{n}-1}(\bar{n}) = \mu + \bar{n}\nu, \\ \Omega_{S_0 \rightarrow S_1}(\bar{n}) &= \Lambda_{\bar{n} \rightarrow \bar{n}+1}(\bar{n}) = \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d\bar{n}}{dt} = -\mu - \bar{n}\nu + \lambda. \tag{2.3.1}$$

Как и следовало ожидать, это уравнение отличается от (3.3.3) отсутствием вероятности 0. Причина та же – предположение о не существенном влиянии случайностей на общий характер течения изучаемого процесса. Как и в предыдущем случае, формальное решение уравнения (2.3.1) может привести к тому, что средняя очередь окажется отрицательной. В связи с этим к (2.3.1) необходимо добавить условие  $\bar{n}(t) \geq 0$ . В случае  $\bar{n}(t) > 0$  необходимо принять  $\bar{n} = 0$  и  $\frac{d\bar{n}}{dt} = 0$ , т.е.  $Z = \{\bar{n} | 0 \leq \bar{n}\}$ .

## 2.4 Модель динамики средних процесса противоборства

Как и ранее рассматриваются две группировки однородных единиц  $M$  и  $N$ . Каждая единица группы  $M$  уничтожает единицу группы

$\mathcal{N}$  с плотностью  $\mu$ , а единица группы  $\mathcal{N}$  единицу противника – с плотностью  $\nu$ . Их начальные численности соответственно равны  $M$  и  $N$ . И здесь будем интересоваться средней численностью группировок  $m(t)$  и  $n(t)$  в некоторый момент времени  $t$ .

Каждая единица любой группировки может находиться в одном из двух состояний:  $S_0$  – единица *уничтожена*,  $S_1$  – единица *не уничтожена*. В связи с этим можно рассматривать каждую группировку отдельно, учитывая их взаимовлияние через интенсивности (плотности) переходов из одного состояния в другое.

Пусть  $m_0(t)$  – среднее число уничтоженных единиц группы  $\mathcal{M}$ , а  $m_1(t) = m(t)$  – среднее число единиц в состоянии  $S_1$ . Тогда состояние системы в любой момент времени  $t$  определяется парой  $\langle m(t), n(t) \rangle$ .

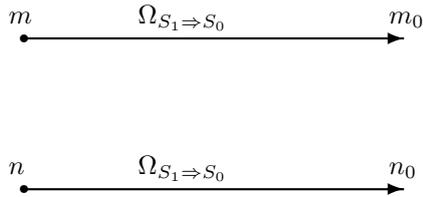


Рис.2.1. Граф состояний модели противоборства.

Граф состояний изображен на рис.2.4. Каждая отдельная компонента связности этого графа относится к одной группировке.

Дифференциальное уравнение для группы  $\mathcal{M}$  имеет вид:

$$dm/dt = -\Omega_{S_1 \Rightarrow S_0}(m, n).$$

Используя соотношение (1.4.3) и учитывая допущение (2.1.3), получаем:

$$\Omega_{S_1 \Rightarrow S_0}(m, n) = \Lambda_{m, n \Rightarrow m-1, n}(m, n) = \nu n.$$

Аналогичное выражение имеет место и для стороны  $\mathcal{N}$ .

Окончательно имеем:

$$dm/dt = -\nu n, \quad dn/dt = -\mu m. \quad (2.4.1)$$

Эти уравнения действительны лишь для неотрицательных численностей групп  $m$  и  $n$ . Поэтому как только в некоторый момент времени  $t^\mu$  стало, например,  $m(t^\mu) = 0$ , в (2.4.1) необходимо положить

$$dm/dt = 0, \quad m(t^\mu) = 0, \quad n(t) = n(t^\mu)$$

для всех  $t \geq t^\mu$ .

Совершенно аналогично необходимо поступить, если в некоторый момент времени  $t^\nu$  стало  $n(t^\nu) = 0$ .

Таким образом, множество значений, которое может принимать характеристика состояний системы,

$$Z = \{ \langle m, n \rangle \mid m \geq 0, n \geq 0 \}.$$

В отличие от вероятностных моделей для средних в уравнениях (2.4.1) отсутствуют вероятности того, что численности сторон равны 0. Однако ясно, что при достаточно больших  $M$  и  $N$  случайные воздействия каждой отдельной единицы на всю систему в целом незначительны и при  $t \leq \min(t^\mu, t^\nu)$  вероятности того, что одна численность одной из группировок станет равной нулю практически мала.

Известно [????], что уравнения (2.4.1) могут быть решены в явном виде. Если, например, в качестве начальных условий задать

$$m(0) = M, \quad n(0) = N,$$

то эти решения имеют вид:

$$m(t) = M \cosh \sqrt{\mu\nu}t - N \sqrt{\nu/\mu} \sinh \sqrt{\mu\nu}t,$$

$$n(t) = N \cosh \sqrt{\mu\nu}t - M \sqrt{\mu/\nu} \sinh \sqrt{\mu\nu}t,$$

при  $m \geq 0$  и  $n \geq 0$

Предположим, что  $t^\nu \leq t^\mu$ . Тогда находим

$$t^\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}} \ln \sqrt{\frac{\sqrt{\mu}M + \sqrt{\nu}N}{\sqrt{\mu}M - \sqrt{\nu}N}}.$$

Понятно, что величина  $t^\nu$  имеет смысл лишь в том случае, если  $\sqrt{\mu}M - \sqrt{\nu}N > 0$ , или

$$\mu M^2 > \nu N^2.$$

Это неравенство является условием того, что группа  $\mathcal{N}$  будет уничтожена раньше, чем группа  $\mathcal{M}$ , и существует момент времени  $t^\nu$ , для которого

$$m(t^\nu) = M\sqrt{1 - \nu N^2 / \mu M^2}, \quad n(t^\nu) = 0.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что численность групп в рассмотренной модели противоборства играет более важную роль, чем "технические" параметры воздействия на противника (интенсивности  $\mu$  и  $\nu$ ).

Уравнения (2.4.1) можно получить также из вероятностной модели противоборства двух типовых осредненных представителей каждой из группировок (исходя из соотношения типа (2.1.1)). Для этого выберем из каждой группы по одному типичному элементу и будем рассматривать процесс противоборства между этими единицами.

Построим сначала такую вероятностную модель для указанной пары единиц, считая, что  $M = N = 1$ . Пусть  $P_{ij}(t)$  – вероятность того, что к моменту времени  $t$  на стороне  $\mathcal{M}$  имеется  $i$  единиц, а на стороне  $\mathcal{N}$  –  $j$  единиц ( $i, j \in 0, 1$ ). Тогда система дифференциальных уравнений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} dP_{11}/dt &= -\Lambda_{11 \Rightarrow 10}P_{11} - \Lambda_{11 \Rightarrow 01}P_{11}, \\ dP_{01}/dt &= -\Lambda_{01 \Rightarrow 11}P_{01} + \Lambda_{11 \Rightarrow 01}P_{11}, \\ dP_{10}/dt &= -\Lambda_{10 \Rightarrow 11}P_{10} + \Lambda_{11 \Rightarrow 01}P_{11}, \\ dP_{00}/dt &= -\Lambda_{10 \Rightarrow 11}P_{10} + \Lambda_{01 \Rightarrow 00}P_{01}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Lambda_{11 \Rightarrow 10} &= \Lambda_{01 \Rightarrow 00} = \mu m, \\ \Lambda_{11 \Rightarrow 01} &= \Lambda_{10 \Rightarrow 00} = \nu n, \\ m &= M(P_{10} + P_{11}), \quad n = N(P_{01} + P_{11}), \end{aligned}$$

из полученных соотношений сразу получаем систему уравнений (2.4.1).

## 2.5 Модель динамики средних процесса поиска и слежения

До сих пор были рассмотрены примеры, когда нелинейность зависимости плотности потоков от численностей составляющих элементов

определялась ”выколотой точкой”. В этом примере эта зависимость определяется квадратичной функцией.

Как и ранее, пусть  $M$  – число разведчиков, осуществляющих поиск заданного числа  $N$  объектов ( $M \geq N$ ) в некотором районе.

Один разведчик отыскивает объект с плотностью  $mmm$ . В процессе слежения новым поиском он не занимается и может потерять объект с интенсивностью  $pmn$ .

Будем интересоваться средней численностью найденных объектов.

Каждый объект может быть в двух состояниях:  $S_1$  – объект обнаружен и за ним ведется наблюдение,  $S_2$  – объект не обнаружен. Пусть число объектов в каждом из этих состояний равно соответственно  $n_1(t) = n(t)$  и  $n_2(t)$ . Так как

$$n(t) + n_2(t) = N, \tag{2.5.1}$$

то состояние рассматриваемой системы с точки зрения требуемого решения полностью определяется числом объектов  $n(t)$ , находящихся под наблюдением. Граф состояний модели поиска изображен на рис.2.5.

Прямо по графу записываем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dn/dt &= -\Omega_{S_1 \Rightarrow S_2} + \Omega_{S_2 \Rightarrow S_1}; \\ dn_2/dt &= -\Omega_{S_2 \Rightarrow S_1} + \Omega_{S_1 \Rightarrow S_2}; \end{aligned}$$

Начальные условия:  $n(0) = n^0$ ,  $n_2(0) = N - n^0$ . Понятно, что ввиду зависимости этих уравнений к ним надо добавить соотношение (2.5.1).

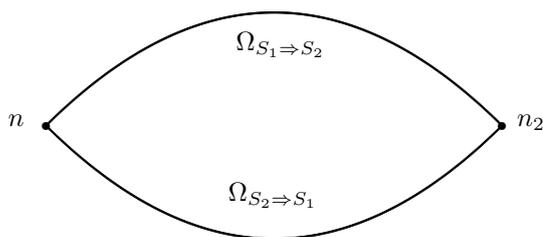


Рис.2.5. Граф состояний модели поиска и слежения

Далее, используя соотношения из (1.6.1):  $\Omega_{S_1 \Rightarrow S_2} = \Lambda_{n \Rightarrow n-1} = n\nu$ ,  $\Omega_{S_2 \Rightarrow S_1} = \Lambda_{n \Rightarrow n+1} = \mu(N-n)(M-n)$ , получаем

$$dn/dt = -\nu n + \mu(N-n)(M-n), \quad 0 \leq n \leq N.$$

Пусть  $n(0) = 0$ . Как и для вероятностной модели, найдем установившееся значение  $n(t)$  при  $t \Rightarrow \infty$ . Из графа следует, что оно существует. Поэтому для его нахождения приравняем правую часть дифференциального уравнения (2.5.2) нулю, после чего получим квадратное уравнение:

$$-n + \alpha(N-n)(M-n) = 0,$$

где  $\alpha = \mu/\nu$ . Решая это уравнение, получим значение для среднего числа объектов, находящихся под наблюдением, в установившемся режиме:

$$n(\infty) = \frac{\alpha(M+N)+1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\alpha(M+N)^2 + 2\alpha(M+N)+1} \quad (2.5.2)$$

Очевидно, что рассчитывать по этой формуле значительно проще, чем по (1.6.2), хотя результаты, полученные по этой формуле при достаточно малом  $N$  могут значительно отличаться. Это можно объяснить следующим образом. Допущение метода динамики средних в этой модели означает, что  $E((M-x)(N-x))$  заменяется на  $(M-Ex)(N-Ex) = (M-n)(N-n)$ , где  $x$  – случайная величина, равная числу объектов, находящихся под наблюдением, а  $Ex = n$  – математическое ожидание этой величины.

В данном случае получаемую при этом разницу можно легко определить:  $E((M-x)(N-x)) = E(MN - xN - xM + x^2) = MN - nN - nM + Ex^2 = (M-n)(N-n) + D(x)$ , где  $D(x)$  – дисперсия числа объектов, находящихся под наблюдением.

Чем больше  $N$ , тем больше первое слагаемое по сравнению с  $D(x)$ , тем ближе результаты, получаемые по вероятностной модели и модели динамики средних.

Для сравнения приведем численный пример. Положим  $\alpha = 1$  и  $N = M$ . Тогда из (2.5.2) получаем:

$$n(\infty) = \frac{2N+1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4N+1}. \quad (2.5.3)$$

Подсчитаем  $n(infty)$  при  $N=3,4,5$  для вероятностной модели поиска и слежения по формуле (1.6.1) и для модели динамики средних

по формуле (2.5.3). Результаты сведем в табличку:

Число объектов $N$	3	4	5
Вероятностная модель	1,697	2,438	3,209
Модель динамики средних	1,853	2,603	3,380
% различия	8,4	6,3	5,1

Как видно, уже для небольших значений  $N$  результаты модели динамики средних фактически совпадают с результатами, полученными по вероятностной модели.

## Глава 3

# Модели системной динамики

Метод динамики средних определяет схему построения дифференциальных уравнений модели, при этом предполагается, что коэффициенты этих уравнений (интенсивности потоков) заданы. Однако во многих случаях затруднения вызывает как раз не составление уравнения, а именно определение интенсивностей (особенно, если они зависят от численностей состояний).

В 60-х гг. Д. Форрестером был разработан подход, позволяющий в какой-то мере формализовать процесс определения интенсивностей. Этот подход получил название метода системной динамики. Модели системной динамики состоят из дифференциальных уравнений динамики средних и совокупности алгебраических, в общем случае нелинейных, уравнений для определения интенсивностей.

### 3.1 Модель популяции кроликов

Проиллюстрируем Развитый Форрестером подход на примере моделирования динамики популяции кроликов. Пусть  $k(t)$  – численность кроликов в момент времени  $t$ ,  $k(0) = k_0$ ;  $B$  – число кроликов, рождаемых в единицу времени. И  $D$  – число кроликов, погибающих в единицу времени. Граф состояний модели динамики средних изображен на рис. 3.1.1.

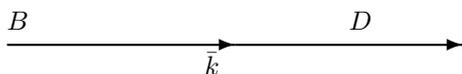


Рис. 3.1.1. Граф состояний в модели о кроликах.

Согласно графу сразу записываем уравнение динамики средних:

$$\frac{dk}{dt} = B - D, k(t) \geq 0.$$

Интенсивности  $B$  и  $D$ , вообще говоря, могут сложным образом зависеть от пищевого снабжения и численности кроликов. Сделаем следующие допущения:

- 1) время взросления кроликов, ограниченность площади обитания и зависимость обеспечения пищей не учитываются;
- 2) ежедневный рацион на всех кроликов не превосходит  $F$ ;
- 3) текущее количество кроликов растет с ростом  $F$  и убывает с ростом  $D$ ;
- 4) рождаемость зависит от популяции и количества пищи  $F_p = F/k$ , съедаемой одним кроликом;
- 5) смертность зависит от популяции и среднего времени жизни  $\theta$ .

Все указанные факторы и их влияния можно отобразить на диаграмме причинности, которая в нашем случае имеет вид, изображенный на рис.3.1.2.

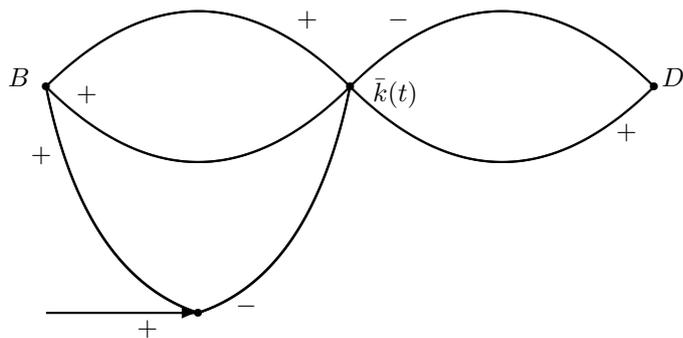


Рис. 3.1.2. Диаграмма причинности в модели о кроликах.

Наличие стрелки между вершинами  $k$  и  $B$  означает, что фактор  $B$  зависит от  $k$ , причем знак плюс у дуги указывает, что с увеличением  $k$  увеличивается и  $B$ . Напротив, дуга от  $D$  к  $k$  означает, что с увеличением  $D$  уменьшается  $k$  и т.д.

Пользуясь диаграммой причинности, уже легче искать зависимости между различными факторами, используемыми в модели.

Относительно рождаемости можно предположить, что  $= B_N B_F k$ , где  $B_N$  – удельная рождаемость при нормальном обеспечении пищей (число рождаемых кроликов, приходящихся на одну взрослую особь), а  $B_F = f(F_p)$  – коэффициент, учитывающий отклонение от нормальных условий и зависящий от количества пищи, приходящейся на одного кролика. Очевидно, что эта зависимость нелинейная, так как с увеличением  $F_p$  коэффициент  $B_F$  должен стремиться к 1. Общее количество пищи  $F$  считается заданным.

Смертность  $D$  прямо пропорциональна числу особей и обратно пропорциональна средней длительности жизни, т.е.  $D = \frac{k}{\theta}$ .

Таким образом, получены и определены все величины, входящие в уравнение динамики. Диаграммы причинности (а также их модификации – так называемые диаграммы потоков) позволяют наглядно увидеть взаимосвязь между различными факторами учитываемыми в модели.

Подход, связанный с использованием метода системной динамики, предполагает описание модели на специальном алгоритмическом языке ДИНАМО, который настолько прост, что легко осваивается людьми, весьма далекими от математики. В этом большое преимущество метода системной динамики: с его помощью могут исследовать свои системы представители самых областей человеческой деятельности, не являющиеся специалистами в области исследования систем.