Задача №9

Пусть X_i, ..., X_n — набор независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих нормальное распределение. Обозначим через S и K выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\left(\sigma^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\left(\sigma^2\right)^{2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^{2}},$$

где μ_3, μ_4 — третий и четвертый выборочный центральный момент, соответственно. $\bar{X}$ — выборочное среднее, а σ^2 — выборочный второй центральный момент (то есть, выборочная дисперсия).

Произведем преобразования величин S и K:

$$Y = S * \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}}, \quad \beta_1 = \frac{3(n^2+27n-70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)},$$

$$W^2 = -1 + \sqrt{2(\beta_1 - 1)}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{\log W}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{W^2-1}},$$

$$Z_S = \delta \log\left(Y/\alpha + \sqrt{(Y/\alpha)^2 + 1}\right).$$

$$E(K) = \frac{3(n-1)}{n+1}, \quad \sigma_K^2 = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}, \quad x = \frac{K - E(K)}{\sigma_K}$$

$$\beta_2 = \frac{6(n^2-5n+2)}{(n+7)(n+9)}\sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}}, \quad A = 6 + \frac{8}{\beta_2}\left[\frac{2}{\beta_2} + \sqrt{1 + \frac{4}{\beta_2^2}}\right],$$

$$Z_K = \left(\left(1 - \frac{2}{9A}\right) - \sqrt[3]{\frac{1-2/A}{1+x\sqrt{2/(A-4)}}}\right)\sqrt{\frac{9A}{2}}.$$

Введем величину D^2 (так называемую *статистику критерия D'Agostino*):

$$D^2 = Z_S^2 + Z_K^2.$$

Продемонстрируйте выполнение следующих фактов:

1. Величина D^2 имеет при $n \to \infty$ распределение χ^2 с двумя степенями свободы.
2. Если распределение X_1, ..., X_n отлично от нормального, то величина D^2 неограничено возрастает с ростом n (так называемое свойство *асимптотической мощности 1*).