1 Матричная алгебра

1. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричная неотрицательно-определенная матрица, $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$ — ее собственные числа.

   Тогда $\mathrm{trace}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$, $|\mathbf{C}| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$, $|\mathbf{I}+\mathbf{C}| = \prod_{i=1}^{p}(1+\lambda_i)$, $1/|\mathbf{I}+\mathbf{C}| = \prod_{i=1}^{p} 1/(1+\lambda_i)$.

2. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричная неотрицательно-определенная матрица ранга r, Пусть $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — симметричная положительно-определенная матрица. Тогда матрица $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ (несимметричная, вообще говоря) имеет p неотрицательных собственных чисел $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$. Число ненулевых собственных чисел равно рангу r матрицы $\mathbf{A}$. Соответствующие собственные вектора образуют базис, который можно выбрать так, чтобы $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{U}$ — матрица, составленная из собственных векторов (говорят, что собственные вектора ортонормированы относительно матрицы $\mathbf{B}$).

   Так как $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}U = \lambda U$ равносильно $\mathbf{A}U = \lambda\mathbf{B}U$, то эту задачу называют обобщенной задачей на собственные числа и собственные вектора (вместо единичной матрицы стоит симметричная положительно определенная матрица $\mathbf{B}$).

   Для обобщенной задачи на собственные значения справедливы те же свойства оптимальности, что и для обычной, только с ортогональностью относительно матрицы $\mathbf{B}$. А именно, $\sup_Z Z^{\mathrm{T}}\mathbf{A}Z/Z^{\mathrm{T}}\mathbf{B}Z = \sup_{Z:Z^{\mathrm{T}}\mathbf{B}Z=1} Z^{\mathrm{T}}\mathbf{A}Z$ равен максимальному собственному числу λ_1 и достигается на $Z = U_1$; $\sup_{Z:Z^{\mathrm{T}}\mathbf{B}U_1=0} Z^{\mathrm{T}}\mathbf{A}Z/Z^{\mathrm{T}}\mathbf{B}Z$ равен λ_2 и достигается на $Z = U_2$. И т.д.

3. В условиях предыдущего пункта, $|\mathbf{B}|/|\mathbf{B}+\mathbf{A}| = 1/|\mathbf{I}+\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{r} 1/(1+\lambda_i)$.

   Следствие. Пусть $\mathbf{A}$ имеет распределение Уишарта $W_p(\mathbf{I}, \nu_A)$, $\mathbf{B}$ имеет распределение Уишарта $W_p(\mathbf{I}, \nu_B)$, $\nu_B \geq p$. $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$ — собственные числа $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Тогда $\prod_{i=1}^{s} 1/(1+\lambda_i)$, где $s = \min(p, \nu_A)$, имеет распределение Лямбда Уилкса $\Lambda_p(\nu_A, \nu_B)$.