Динамические модели для описания рынка товаров

Записки нахального дилетанта

1 Модель Вольтерра

1.1 Общее описание. Стационарная модель

Рассмотрим n однотипных товаров, конкурирующих на рынке. Пусть Δ — некоторый характерный промежуток времени. Обозначим $x_i(t)$ число единиц i-го товара, купленного за время $(t-\Delta, t)$. Наша задача — построить динамическую модель развития рынка товаров с номерами $1, \ldots, n$ с учетом конкуренции и других факторов.

Реальное содержание словосочетания "единица товара" может быть различным. Это может быть натуральная или условная единица товара ("100-мл бутылка"), денежная единица или что-нибудь другое. Иногда удобно считать (по аналогии с динамической моделью сосуществования нескольких видов, [1]), что $x_i(t)$ — это число покупателей i-го товара за время $(t-\Delta, t)$ (например, приведенное на единицу товара). Каждая единица имеет свои достоинства и недостатки. Например, денежная единица непосредственно связана с прибылью компании, производящей товар, но требует учета факторов, связанных с инфляцией, изменением платежеспособности населения и так далее. В дальнейшем мы будем называть $x_i(t)$ *числом продаж i-го товара.*

Понятие "характерного промежутка времени" связано в первую очередь с тем максимальным отрезком времени, внутри которого детализация динамики рынка нас не интересует. Скажем, если Δ соответствует одним суткам, то внутрисуточная периодичность числа продаж ("часы пик") нам будет недоступна, а недельная будет учтена. Кроме этого, реальные данные о числе продаж снимаются в дискретные моменты времени (обычно отстоящие друг от друга на промежуток времени Δ_1). Если промежуток Δ_1 выбран с учетом требуемой детализации динамики, то можно положить $\Delta = \Delta_1$.

Отнесение к моменту времени t промежутка $(t-\Delta, t)$ с практической точки зрения несущественно, но удобно ввиду "неопережающего" характера величин $x_i(t)$ — значение $x_i(t)$ становится известным к моменту времени t.

Перейдем теперь непосредственно к описанию модели. Естественно предположить, что

$$dx_i(t)/dt = \Lambda_i(t)x_i(t),$$

где $\Lambda_i(t) = \Lambda_i(t; x_1(t), \ldots, x_n(t))$. В этом случае

$$x_i(t) = x_i(s) \exp\left(\int_s^t \Lambda_i(r)dr\right)$$

и функции Λ_i можно придать смысл *интенсивности использования товарной ниши i-го продукта.* Если $\Lambda_i \equiv 0$ (т.е. доля используемой товарной ниши не меняется), то не меняется и число продаж. В стационарных условиях неограниченного рынка и роста используемой доли товарной ниши выполнено равенство $\Lambda_i = \lambda_i = \text{const} > 0$, ограниченность рынка и конкуренция уменьшают эту "идеальную" интенсивность λ_i. Таким образом, мы можем считать, что в стационарных условиях

$$\Lambda_i(t) = \lambda_i - F_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)). \tag{1}$$

В нестационарном случае λ_i и F_i могут непосредственно зависеть от времени. Остановимся на стационарной ситуации.

Ясно, что функция F_i должна быть неотрицательна и монотонно не убывать по каждой из переменных x_k (при $k \neq i$ это соответствует влиянию конкуренции, при $k = i$ — ограниченности рынка).

Простейшая модель функции F_i — это линейная модель

$$F_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k,$$

где $a_{i,k} \geq 0$. Таким образом, мы пришли к системе дифференциальных уравнений

$$dx_i(t)/dt = x_i(t)\left(\lambda_i - \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k(t)\right). \tag{2}$$

с постоянными коэффициентами λ_i и $a_{i,k}$. Именно такая система рассмотрена в [1] для описания сосуществования нескольких видов, борющихся за общую пищу.

Перепишем систему (2) в несколько другом виде. Введя обозначения $c_i = a_{i,i}$ и $w_i = \lambda_i / a_{i,i}$, получим

$$dx_i(t)/dt = c_i x_i(t)(w_i - x_i(t)) - \sum_{k \neq i} a_{i,k} x_i(t) x_k(t). \tag{3}$$

Проинтерпретируем коэффициенты, входящие в правую часть (3). Коэффициент c_i имеет смысл *собственной интенсивности развития i-го товара.* Коэффициенты $a_{i,k}$ являются *коэффициентами влияния k-го товара на i-ый.* Они отражают конкуренцию различных продуктов на рынке. Для интерпретации коэффициента w_i положим $a_{i,k} = 0$ при $i \neq k$, т.е. предположим, что товары не конкурируют друг с другом. Тогда уравнение (3) превратится в

$$dx_i(t)/dt = c_i x_i(t)(w_i - x_i(t)) \tag{4}$$

и w_i приобретает смысл *мощности* товара i, т.е. потребительского спроса на i-ый товар в стационарных условиях без конкуренции. Отметим, что собственная интенсивность i-го товара равна отношению интенсивности использования товарной ниши к потребительскому спросу. Кроме того, как нетрудно видеть, в отсутствии конкуренции число продаж всегда стремится к спросу.

1.2 Учет нестационарности

Уравнение (3) при постоянных коэффициентах c_i, w_i и $a_{i,k}$ описывает развитие рынка однотипных товаров в постоянных условиях. На самом деле среда, в которой происходит это развитие, не является постоянной, что соответствует зависимости коэффициентов c_i, w_i и $a_{i,k}$ от времени. Задание этой зависимости — трудная задача, которая может быть решена только с учетом реальной экономической интерпретации коэффициентов. Тем не менее мы опишем вариант учета нескольких источников такой нестационарности.

Список литературы

[1] Volterra, V., (1931), *Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie*, Cahiers Scientifique, Fascicule 7, Paris; (русский перевод: Вольтерра, В., (1976), *Математическая теория борьбы за существование*, М., Наука).