Моделирование случайных величин

Anton Korobeynikov
anton@korobeynikov.info

7 марта 2021 г.

Во всех случаях кроме реализации собственно процедуры моделирования необходимо доказать, что полученная процедура действительно моделирует распределение из задания.

Вариант 1

Изучите зависимость от a трудоемкости двух методов моделирования случайной величины с плотностью

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\Phi(a)}, \quad x > a,$$

где

$$\Phi(a) = \int\limits_a^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Замечание: реализации методов должны быть соответствующим образом векторизованы.

Замечание: для сравнения трудоемкости использовать пакет `microbenchmark`

Метод Marsaglia (Marsaglia, 1964)

1. Моделирование U, V — р.р. $[0, 1]$.
2. Вычисление $X = \sqrt{a^2 - 2\log U}$.
3. Если $VX \geqslant a$, перейти на п. 1, иначе вернуть X.

Метод отбора из экспоненциального распределения

1. Моделирование E, E^* — экспоненциально распределенных с.в.
2. Если $E^2 \geqslant 2a^2E^*$, перейти на п. 1, иначе вернуть $X = a + \frac{E}{a}$.

Вариант 2

Изучите зависимость от $0 < a < 1$ трудоемкости двух методов моделирования случайной величины с гамма-плотностью

$$f(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)}, \quad x \geqslant 0.$$

Замечание: реализации методов должны быть соответствующим образом векторизованы.

Замечание: для сравнения трудоемкости использовать пакет `microbenchmark`

Метод Johnk'a

1. Моделирование U, V — р.р. $[0,1]$.
2. Вычисление $X = U^{1/a}$, $Y = V^{1/(1-a)}$.
3. Если $X + Y \geq 1$ перейти на п.1, иначе промоделировать E — экспоненциально распределенную с.в. и вернуть $\frac{EX}{X+Y}$.

Метод отбора из распределения Вейбулла

1. Положить $c = \frac{1}{a}$, $d = a^{\frac{a}{1-a}}(1-a)$.
2. Моделирование Z, E — экспоненциально распределенных с.в. Положить $X = Z^c$.
3. Если $Z + E \leqslant d + X$ перейти к п. 2, иначе вернуть X.

Вариант 3

Изучите зависимость от t и a трудоемкости метода моделирования случайной величины с усеченной гамма-плотностью

$$f(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{C(a)}, \quad x \geqslant t,$$

где $C(a)$ — некоторая нормализующая константа, $0 < a < 1$.

Замечание: реализация метода должна быть соответствующим образом векторизованы.

Замечание: для сравнения трудоемкости использовать пакет `microbenchmark`

Отбор из экспоненциального распределения

1. Моделирование U — р.р. $[0,1]$, E — экспоненциально распределенной с.в. Вычисление $X = t+E$.
2. Если $XU^{\frac{1}{1-a}} \leqslant a$, перейти к п. 1, иначе вернуть X.

Вариант 4

Изучите зависимость от t и a трудоемкости метода моделирования случайной величины с усеченной гамма-плотностью

$$f(x) = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{C(a)}, \quad x \geqslant t,$$

где $C(a)$ — некоторая нормализующая константа, $a > 1$.

Замечание: реализация метода должна быть соответствующим образом векторизованы.

Замечание: для сравнения трудоемкости использовать пакет `microbenchmark`

1. Моделирование E, E^* — экспоненциально распределенных с.в. Вычисление $X = t + \dfrac{E}{1 - \frac{a-1}{t}}$.
2. Если $\dfrac{X}{t} - 1 + \log\dfrac{t}{X} \leqslant \dfrac{E^*}{a-1}$, перейти к п. 1, иначе вернуть X.

Вариант 5

Сравните трудоемкости трех методов моделирования распределения Коши

Метод обратных функций

1. Моделировать U — р.р. $[0, 1]$.
2. Вернуть $X = \tan(\pi U)$.

Полярный метод I

1. Моделировать N_1, N_2 — нормально распределенные с.в.
2. Вернуть $X = \frac{N_1}{N_2}$

Полярный метод II

1. Моделировать V_1, V_2 — р.р. $[-1, +1]$.
2. Если $V_1^2 + V_2^2 \leqslant 1$, перейти к п.1, иначе вернуть $X = \frac{V_1}{V_2}$.

Вариант 6

Изучите зависимость от t трудоемкости двух методов моделирования случайной величины с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{C(t)\,(1 + x^2)}, \quad x \geqslant t,$$

где $C(t)$ — некоторая нормализующая константа.

Замечание: реализации методов должны быть соответствующим образом векторизованы.

Замечание: для сравнения трудоемкости использовать пакет `microbenchmark`

Метод обратных функций

1. Моделировать U — р.р. $[0, 1]$.
2. Вернуть $X = \tan\left((1 - U)\arctan(t) + \dfrac{\pi U}{2}\right)$

Метод отбора

1. Моделировать U, V — р.р. $[0, 1]$.
2. Вычислить $X = \frac{t}{U}$
3. Если $V\left(1 + \frac{1}{X^2}\right) \leqslant 1$, перейти к п.1.
4. Вернуть X.

Вариант 7

Изучите трудоемкость моделирования стандартного нормального распределения из симметричного экспоненциального с плотностью

$$g(x) = \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|}$$

в зависимости от α (несложно видеть, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}e^{\alpha^2/2},$$

где $f(x)$ — плотность стандартного нормального распределения). Симметричное экспоненциальное распределение достаточно легко моделировать методом обратных функций.

Сравните трудоемкость такого метода отбора с известным методом Бокса-Мюллера моделирования стандартного нормального распределения:

1. Моделировать U_1, U_2 — р.р. $[0, 1]$.
2. Вернуть $X_1 = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2), X_2 = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)$

Замечание: для сравнения трудоемкости использовать пакет `microbenchmark`

Вариант 8

Реализуйте метод адаптивного отбора с использованием производной логарифма плотности для бета распределения с параметрами 1.3 и 2.7. Сравните трудоемкость со стандартной функцией `rbeta` при больших объемах выборки.

Вариант 9

Реализуйте метод адаптивного отбора без использования производной логарифма плотности для бета распределения с параметрами 1.3 и 2.7. Сравните трудоемкость со стандартной функцией `rbeta` при больших объемах выборки.

Вариант 10

Сравните трудоемкость моделирования биномиального распределения при помощи табличного метода (через функцию `sample`) с моделированием посредством испытаний Бернулли. Постройте зависимость трудоемкости от различных значений параметров распределения.

Вариант 11

Реализуйте метод адаптивного отбора с использованием производной логарифма плотности для обобщенного обратного Гауссовского распределения (generalized inverse Gaussian, GIG) с плотностью

$$p(x) = \frac{(a/b)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{ab})} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right\},$$

где K_λ — модифицированная функция Бесселя второго рода, $a, b > 0$, $x > 0$. Параметр $\lambda > 1$ считайте фиксированным.

Вариант 12

Реализуйте метод адаптивного отбора без использования производной логарифма плотности для обобщенного обратного Гауссовского распределения (generalized inverse Gaussian, GIG) с плотностью

$$p(x) = \frac{(a/b)^{\lambda/2}}{2K_\lambda(\sqrt{ab})} x^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right\},$$

где K_λ — модифицированная функция Бесселя второго рода, $a, b > 0$, $x > 0$. Параметр $\lambda < 1$ считайте фиксированным.

Вариант 13

Реализуйте метод адаптивного отбора с использованием производной логарифма плотности для распределения Макегама с плотностью

$$p(x) = (a + bc^x) \exp\left\{-ax - \frac{b}{\ln c}(c^x - 1)\right\}, \quad b > 0, c > 1, a > -b, x \geqslant 0.$$

Параметры зафиксируйте. Параметр a выберите меньше нуля.

Вариант 14

Реализуйте метод адаптивного отбора с использованием производной логарифма плотности для распределения Бирнбаума-Саундерса с плотностью

$$p(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{2\gamma x} \varphi\left(\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{x}}{\gamma}\right), \quad x > 0, \gamma > 0.$$

Здесь $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения.

Вариант 15

Реализуйте метод адаптивного отбора без использования производной логарифма плотности для распределения Бирнбаума-Саундерса с плотностью

$$p(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{2\gamma x} \varphi\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{\gamma}\right), \quad x > 0, \gamma > 0.$$

Здесь $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения.

Вариант 16

Реализуйте метод адаптивного отбора с использованием производной логарифма плотности для нормального распределения с параметрами 5 и 10. Подсчитайте и продемонстрируйте зависимость количества реализаций кусочно-экспоненциальной случайной величины на одну реализацию моделируемой случайной величины.

Вариант 17

Реализуйте метод адаптивного отбора без использования производной логарифма плотности для extreme value distribution с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1-1/\xi} \exp\left(-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right), \quad 1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) > 0.$$

Исследуйте трудоемкость моделирования в зависимости от параметров.

Вариант 18

Сравните трудоемкость двух методов моделирования стандартного нормального распределения.
Замечание: реализации методов должны быть соответствующим образом векторизованы.
Замечание: для сравнения трудоемкости использовать пакет `microbenchmark`

Метод Бокса-Мюллера

1. Моделировать U_1, U_2 — р.р. $[0,1]$.
2. Вернуть $X_1 = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2), X_2 = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$

Метод нормальной аппроксимации

1. Моделировать $U_1, \ldots, U_{12}$ — р.р. $[-1/2, 1/2]$.
2. Вернуть $Z = \sum_{i=1}^{12} U_i$.

Вариант 19

Реализовать процедуру адаптивного метода отбора ($ARMS$), описанного в (Martino et al., 2012) для плотности распределения Леви:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{2\pi}}\frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}}, \quad x > \mu.$$

Исследовать свойства полученного алгоритма. Исследуйте трудоемкость моделирования в зависимости от параметров.

Вариант 20

Реализовать процедуру адаптивного метода отбора (IA^2RMS), описанного в (Martino et al., 2012) для плотности распределения Леви:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{2\pi}}\frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}}, \quad x > \mu.$$

Исследовать свойства полученного алгоритма. Исследуйте трудоемкость моделирования в зависимости от параметров.

Вариант 21

Реализовать процедуру адаптивного метода отбора (IA^2RMS), описанного в (Martino et al., 2012) для плотности распределения Леви:

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{2\pi}}\frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}}, \quad x > \mu.$$

Исследовать свойства полученного алгоритма. Исследуйте трудоемкость моделирования в зависимости от параметров.